Educación Secundaria para Personas Adultas

(E. S. P. A.)

MATEMÁTICAS

MÓDULO III – NIVEL II

(3º E. S. P. A.)

C. E. A "MAR MENOR"

Curso 2010-2011

Unidad 0: Revisión de Aritmética.

1. LOS NÚMEROS ENTEROS.

Los **números naturales** son los que utilizamos para contar los elementos de un conjunto:

6 personas.

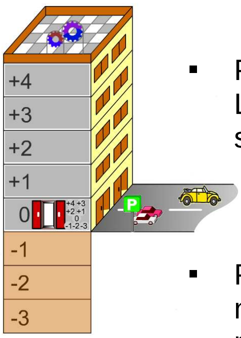
8 monedas.

6 botellas.

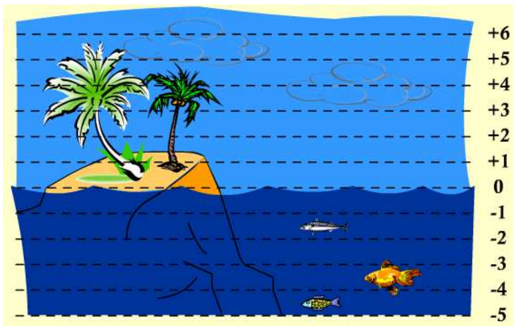
Pero hay situaciones reales que no se pueden expresar con números naturales, por ejemplo: debo 20 €, 100 metros bajo el nivel del mar, 2 grados bajo cero.... Para representar situaciones como éstas, los matemáticos tuvieron la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales a otro conjunto. A este nuevo conjunto le denominaron el conjunto de los **números enteros.** Los números enteros son el 0 y los números positivos, {+1, +2, +3, +4, +5,…}, y negativos, {–1, –2, –3, –4, –5,…}.

Los números enteros son números creados para referirse a situaciones en las que se marca un origen (que se considera el valor 0) que provoca un antes y un después, un delante y un detrás, un arriba y un abajo…

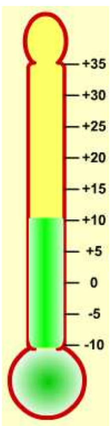
Los números enteros aparecen en muchas situaciones de la vida cotidiana:



- Para señalar el número de plantas de un edificio en un ascensor. Los números negativos se utilizan para indicar las plantas subterráneas o sótanos.



- Para medir altitudes. Se considera 0 el nivel del mar, los niveles por encima del mar se pueden expresar por números enteros positivos, y los niveles por debajo del nivel del mar se pueden expresar por números enteros negativos.

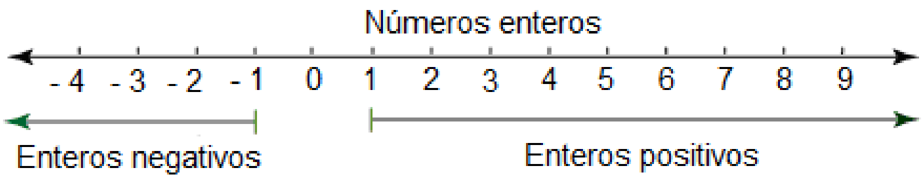


- Para medir temperaturas. Las temperaturas por encima de 0º C se expresan con números positivos y las temperaturas inferiores a 0º C se expresan con números negativos.

2. LOS NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA.

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica:

- El cero, 0, divide a la recta en dos semirrectas iguales.
- Las semirrectas se dividen a su vez en partes iguales.
- Los números enteros **positivos** se sitúan a la **derecha** del cero.
- Los números enteros **negativos** se sitúan a la **izquierda** del cero.

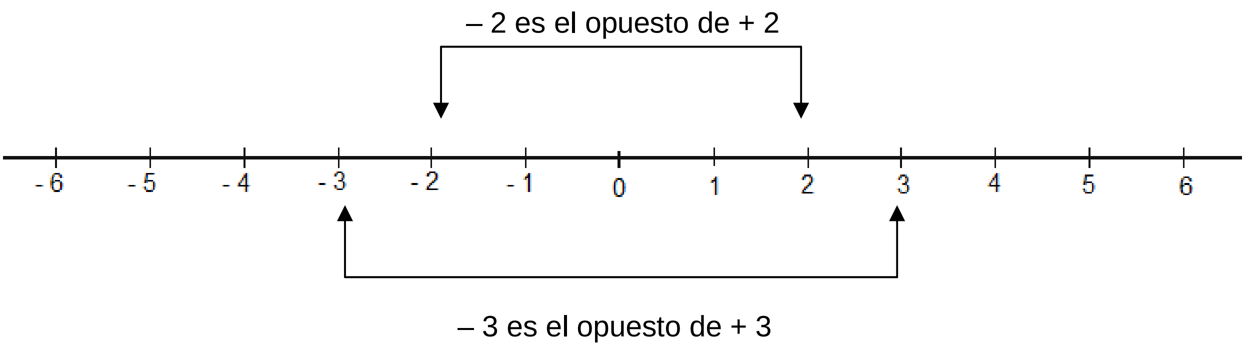


La distancia desde un punto al cero es lo que se llama **valor absoluto**. El valor absoluto de un número entero es el que resulta al eliminar el signo y se representa entre dos barras verticales.

Por ejemplo, el valor absoluto de – 3 es 3 y el valor absoluto de + 5 es 5.

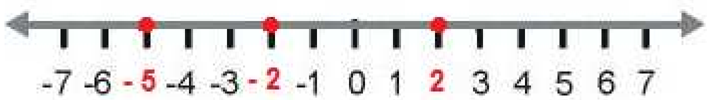
Se representa: | – 3 | = 3 y | + 5 | = 5

Dos **números enteros** se dice que son **opuestos** cuando su representación en la recta numérica está a igual distancia de 0 pero en sentido contrario. Es decir, cuando tienen distinto signo e igual valor absoluto.



3. COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.

Para comparar números enteros resulta de gran utilidad situarlos en la recta numérica:



Los números enteros están representados de forma creciente sobre la recta numérica; por tanto, – 5 es menor que – 2, y éste, a su vez, es menor que +2.

Se escribe: – 5 < – 2 < +2.

El mayor de dos o más números enteros es el que está situado más a la derecha en la recta numérica.

- De dos enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.

  Así, + 3 < + 5, ya que |+ 3| = 3 < |+ 5| = 5.

- De dos enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto.

  Así, – 6 < – 4, ya que | – 6| = 6 > | – 4| = 4.

- El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquiera positivo.

4. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS.

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS.

- Para sumar números enteros del **mismo signo**, se suman los valores absolutos y se antepone el mismo signo que tengan los sumandos.

  (+ 2) + (+ 5) = + 7   (– 2) + (– 5) = – 7

- Para sumar números enteros de **signos contrarios**, se restan los valores absolutos y se antepone el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

  (+ 2) + (– 5) = – 3   (– 3) + (+ 6) = + 3

- Para restar números enteros, debemos tener en cuenta:

  - El signo + delante de un paréntesis no afecta a los signos de los números contenidos en el paréntesis.

    + (– 7) = – 7   + (+ 6) = + 6

  - El signo – delante de un paréntesis modifica los signos de los números contenidos en el paréntesis.

    – (– 7) = + 7   – (+ 6) = – 6

  Así pues, para restar números enteros, aplicaremos en primer lugar estas reglas y después realizaremos la operación:

  (+ 2) – (– 5) = + 2 + 5 = +7   (– 6) – (– 4) = – 6 + 4 = –2

¿Cómo se resuelve una expresión con sumas y restas?

$$\mathbf{(-4) + (+5) - (+7) - (-3) + (-9)}$$

Aplicamos, primero, las reglas de los signos antes de un paréntesis, y, después, la resolvemos:

$$(-4) + (+5) - (+7) - (-3) + (-9) = -4 + 5 - 7 + 3 - 9$$

Primer método: Se hacen las operaciones en el orden en que aparecen.

$$\underbrace{-4+5}_{+1} - 7 + 3 - 9 = \underbrace{+1-7}_{-6} + 3 - 9 = \underbrace{-6+3}_{-3} - 9 = \underbrace{-3-9}_{-12} = \mathbf{-12}$$

Segundo método:

Se suman los números que llevan el signo + → 5 + 3 = 8

Se suman los números que llevan el signo – → 4 + 7 + 9 = 20

Se resta el segundo resultado del primero → 8 – 20 = **– 12**

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.

- Para multiplicar números enteros, multiplicamos los valores absolutos y al resultado se le pone el signo + si ambos eran del mismo signo ó – si eran de distinto signo.
- Seguimos las reglas de los signos.

(+) · (+) = +	(+ 2) · (+ 3) = + 6
(+) · (–) = –	(+ 2) · (– 3) = – 6
(–) · (+) = –	(– 2) · (+ 3) = – 6
(–) · (–) = +	(– 2) · (– 3) = + 6

DIVISIÓN EXACTA DE NÚMEROS ENTEROS.

- Para dividir números enteros dividimos los valores absolutos y aplicamos las reglas de los signos que se cumplen igual que en el producto.

(+) : (+) = +	(+ 12) : (+ 3) = + 4
(+) : (–) = –	(+ 12) : (– 3) = – 4
(–) : (+) = –	(– 12) : (+ 3) = – 4
(–) · (–) = +	(– 12) : (– 3) = + 4

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS.

- Para realizar operaciones combinadas con números enteros debemos tener en cuenta la jerarquía de operaciones, de modo que:
  - Primero se realizan los paréntesis y corchetes.
  - Después las multiplicaciones y divisiones.
  - Después las sumas y las restas.
  - Cuando dos operaciones tienen la misma importancia se realizan de izquierda a derecha.

[6 · 3 + 5 · (9 – 4)] – 12 : (– 4) = [18 + 5 · 5] – 12 : (– 4) =

= (18 + 25) + 3 = 43 + 3 = **+ 46**

Act.1. Calcula:

a. 5 + 3 – 2 + 1 – 4 =

b. 3 + 5 – (1 – 4 + 7) – 2 =

c. [(9 – 3) – (5 + 2)] – 7 =

d. 3 + [5 – (8 – 3)] – 2 =

Act.2. En un autobús viajan 5 personas y cada una de ellas lleva una bolsa. En la primera parada del autobús suben tres personas llevando dos bolsas cada una, y bajan dos personas con una bolsa cada una. En la siguiente parada sube una persona con tres bolsas y bajan dos personas con dos bolsas cada una. ¿Cuántas bolsas hay en ese momento en el autobús?

Act.3. Calcula:

a. (+3) · (– 4) – (+5) · (–2) =

b. (– 16) : (+2) + (+54) : (–9) =

c. (–3) · (5 – 7) =

d. [(–5) · (+3) + (– 7) · (– 3)] : (4 + 5 – 7) =

Act.4. En el año 27 a. C., el Senado de Roma concedió a Cayo Julio Cesar Octavio el título de Augusto cuando tenía 36 años de edad. Según estos datos, ¿en qué año nació el emperador Augusto? Si murió 41 años después en la ciudad de Nola, ¿en qué año falleció?

Act.5. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera a razón de 9º C cada 300 m, aproximadamente. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de – 90 º C?

Act.6. Calcula:

a. 15 : 5 – 6 : 3 + 49 : 7 – 22 : 2 =

b. (5 + 3) : 2 – (7 – 4) : 3 =

c. – 6 + [7 – 5 – (– 2) + (– 4)] =

d. [36 : (–4) – 3 · 2] : (– - 4 + 1) =

e. 4 – 6 : (6 – 4) – [16 : (9 – 1) – 3] =

f. (4 – 6 : 2)] – [2 – (1 – 10) : 3] =

Act.7.¿Cuánto dinero perdió una persona al introducir 63 monedas de 20 céntimos de euro en una máquina de juegos, si por cada 7 monedas que introdujo le salieron 1€ de premio?

Act.8. Calcula la diferencia entre una estación de metro que está situada a 36 metros de profundidad y el quinto piso de una casa que está a 15 metros de altura.

Act.9. Un banco de peces que está a 125 m bajo el nivel del mar, primero baja 347 m y luego sube 231 m. ¿A qué distancia del nivel del mar se encuentra ahora?

Act.10. Calcula:

a. $-7 \cdot [5 + (-3) \cdot 4] - 2 \cdot (18 : 6 - 5) =$
b. $-5 + 5 \cdot (-2) - 18 : (-2 - 4) =$
c. $-15 - 3 \cdot [16 : (2 - 4) + 5 \cdot 2] - 6 \cdot (-1 - 4) =$
d. $20 - 4 \cdot [-6 - 2 \cdot (-4 + 6) : (2 + 3 \cdot (-2))] =$

5. POTENCIA Y RAÍZ CUADRADA.

Una **potencia** es la forma abreviada de escribir el producto de un número por sí mismo varias veces. El número que se multiplica se llama base y el número de veces que se multiplica se llama exponente.

EXPONENTE

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$$

BASE

Para **leer una potencia**, nombramos el número de la base y el número del exponente separados por la expresión "elevado a".
El número del exponente también se puede decir en forma de ordinal femenino.

Las **potencias de exponente 2** se llaman cuadrados perfectos y se leen nombrando el número de la base y a continuación la expresión "elevado al cuadrado".

Las **potencias de exponente 3** se leen nombrando el número de la base y a continuación la expresión "elevado al cubo".

5^2 se lee "cinco (elevado) al cuadrado".
7^3 se lee "siete (elevado) al cubo".
2^5 se lee "dos elevado a cinco" o bien "dos (elevado) a la quinta".
13^4 se lee "trece elevado a cuatro" o bien "trece (elevado) a la cuarta".

Una **potencia de base 10** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

$10^6 = 1000000$
$10^3 = 1000$

Cualquier número puede descomponerse como suma de potencias de 10 multiplicadas por las cifras de ese número (**descomposición polinómica de un número**)

$25 = 2 \cdot 10 + 5$

$7856 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

Recuerda: ***EL VALOR DE CUALQUIER POTENCIA DE EXPONENTE 0 SIEMPRE ES 1.***

$10^0 = 1$ $3^0 = 1$ $(-7)^0 = 1$ $325^0 = 1$

POTENCIAS DE BASE ENTERA Y EXPONENTE NATURAL.

- Si la base es positiva, el resultado de la potencia siempre es positivo: $(+4)^3 = +64$
- Si la base es negativa, el signo del resultado de la potencia depende del exponente.
  - Si el exponente es par, el resultado de la potencia es positivo: $(-5)^2 = +25$
  - Si el exponente es impar, el resultado de la potencia es negativo: $(-2)^3 = -8$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS: Hay algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles para realizar operaciones con ellas:

Producto de potencias de la misma base.	Si multiplicamos dos o más potencias con la misma base, el resultado es otra potencia de igual base y exponente la suma de todos los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$	$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$
Cociente de potencias de la misma base.	Si dividimos dos potencias con la misma base, el resultado es otra potencia de igual base y exponente la resta de todos los exponentes. $a^m : a^n = a^{n-m}$	$2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$
Potencia de otra potencia.	Una potencia elevada a un exponente es igual a otra potencia de la misma base y exponente el producto de los exponentes. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(7^3)^5 = 7^{3 \cdot 5} = 7^{15}$

Producto de potencias de igual exponente.	Si multiplicamos dos o más potencias con el mismo exponente, el resultado es otra potencia de igual exponente y con base el producto de todas las base. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$
Cociente de potencias de igual exponente.	Si dividimos dos potencias con el mismo exponente, el resultado es otra potencia de igual exponente y cuya base es el cociente de ambas bases. $a^m : b^m = (a : b)^m$	$20^6 : 4^6 = (20 : 4)^6 = 5^6$

PARA SUMAR O RESTAR POTENCIAS NO HAY NINGUNA REGLA QUE SIMPLIFIQUE LA OPERACIÓN.

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$$

RAÍZ CUADRADA.

La **raíz** es la operación inversa a la potencia. Sólo veremos la **raíz cuadrada**, es decir, lo contrario de elevar al cuadrado. Su símbolo es: $\sqrt{\ }$

Por ejemplo: decimos que la raíz cuadrada de 25 es 5 porque $5^2 = 25$, y lo representamos:

$$\sqrt{25} = 5$$

En una raíz cuadrada distinguimos los siguientes elementos:

ÍNDICE

RAÍZ

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

RADICAL

RADICANDO

CUANDO EL ÍNDICE ES 2 HABITUALMENTE NO SE ESCRIBE.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES. Al igual que ocurría con las potencias, existen algunas propiedades que nos facilitan los cálculos con raíces:

Raíz de un producto.	La raíz de un producto es igual al producto de las raíces. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{100} = 10$
Raíz de un cociente.	La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$	$\sqrt{2500} : \sqrt{25} = \sqrt{(2500 : 25)} = \sqrt{100} = 10$

Act.11. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a. $(-2)^5 =$
b. $-3^2 =$
c. $7^0 =$
d. $(-4)^1 =$
e. $7^2 =$
f. $12^1 =$
g. $(-5)^2 =$
h. $(-4)^0 =$
i. $-6^3 =$
j. $(-1)^{17} =$
k. $10^8 =$
l. $-3^3 =$
m. $(-3)^4 =$
n. $(-6)^0 =$

Act.12. Aplica las propiedades de las potencias para realizar las siguientes operaciones, obteniendo el resultado en forma de potencia:

a. $(-7) \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 =$
b. $3^5 : 3^2 =$
c. $2^6 : (2^8 : 2^5) =$
d. $[(-3)^6]^2 =$
e. $\left(7^4 \cdot 7^5\right) : 7^3 =$
f. $\left[6^9 \cdot \left(6^2\right)^3\right] : \left(6^4 \cdot 6^2\right) =$
g. $\left[\left(3^2\right)^5 : 3^4\right] : \left(3^5 \cdot 3^0\right) =$

Act.13. Completa:

a. $(-3)^3 \cdot 9 \cdot$ ____ $= (-3)^6$
b. $(7^3)^2 :$ ____ $= 7$
c. $[(-2)^2]^3 \cdot (-2) =$ ____
d. $25^4 : (5^3 \cdot$ ____ $) = 5^3$

Act.14. Calcula:

a. $(-3)^4 - (-3)^3 + (-3) =$
b. $-3^2 - 2^2 - [(5-7)^2 \cdot 2 - 2^3 : 4]^2 =$
c. $-3^2 - [-(2^2 - 2 + 1) - (3+1)^0 - 2^2] =$

Act.15. Calcula las siguientes raíces cuadradas, sin efectuar previamente las operaciones:

a. $\sqrt{169 \cdot 64} =$
b. $\sqrt{25600 : 64} =$
c. $\sqrt{625 : 25} =$
d. $\sqrt{189 \cdot 121} =$

6. DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES.

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO: Son los números que resultan de multiplicar dicho número por un número natural cualquiera. Decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene un número entero de veces. Cualquier número tendrá infinitos múltiplos.

Por ejemplo, los múltiplos de 6 son: $\dot{6} = \{0, 6, 12, 18, 24...\}$

***DIVISORES DE UN NÚMERO**:* Son los números por los que se puede dividir dicho número, resultando de cociente otro número natural y de resto 0.
Por ejemplo, 36 : 12 = 3, entonces, 36 es divisible por 12, o bien 12 es divisor de 36.

Para calcular todos los divisores de un número:

- Se divide el número por todos los números menores que él, ordenadamente, de menor a mayor.

- Cuando la división es exacta, se obtienen dos divisores.

- El proceso se termina cuando el cociente es menor o igual que el divisor.

Por ejemplo: Vamos a calcular todos los divisores del número 66.

66:1= 66 66:2= 33 66:3= 22 66:6= 11

Las divisiones anteriores son exactas. Luego: 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 y 66 son los divisores de 66.

***CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD**:* Son reglas prácticas sencillas que sirven para determinar si un número es divisible por otro sin realizar la división.

DIVISIBLE POR	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLOS
2	Acaba en 0 o cifra par.	24, 780, 3468.
3	La suma de sus cifras es múltiplo de 3.	111, 348, 981.
5	Acaba en 0 ó en 5.	230, 345, 7650.
7	Cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es múltiplo de 7.	84,105, 595.
9	Cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.	981, 630, 117.
11	Cuando la diferencia entre la suma de las cifras de los lugares pares y la suma de las cifras de los lugares impares, en el sentido posible, es múltiplo de 11.	132, 165, 2750.

***NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS**:* **Números primos** son aquellos que sólo se pueden dividir de forma exacta por la unidad y por ellos mismos. **Números compuestos** son aquellos que tienen más de dos divisores. EL 1 NO ES PRIMO NI COMPUESTO, ya que su único divisor es él mismo. Por ejemplo: El número 17 sólo puede dividirse por 1 y por 17, es un número primo. El número 12 es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12, es un número compuesto.

***DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO**:* Podemos descomponer cualquier **número en factores primos (factorizar),** dividiendo entre sus distintos factores primos, comenzando por 2, siguiendo por 3, por 5,… hasta obtener uno en el cociente. De este modo podemos escribir cualquier número como un producto de factores primos o de potencias de números primos.

Ejemplo: Vamos a obtener la descomposición factorial de 60.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

***MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M. c. d.) DE VARIOS NÚMEROS**:* Es el mayor de sus divisores comunes. Si el máximo común divisor de dos números es 1, se dice que son **primos entre sí.** Para calcularlo:

- Factorizamos los números.
- Tomamos los factores comunes elevados al menor exponente.
- El M. c. d. es el producto de estos factores.

Por ejemplo: Vamos a calcular M. c. d. (24, 36, 40).

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = \underline{2^3} \cdot 3$ $\qquad$ $36 = \boxed{2^2} \cdot 3^2$ $\qquad$ $24 = \underline{2^3} \cdot 5$

$$\text{M. c. d. } (24, 36, 40) = 2^2 = 4$$

***MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m. c. m.) DE VARIOS NÚMEROS**:* Es el menor de sus múltiplos comunes. Para calcularlo:

- Factorizamos los números.
- Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
- El m. c. m. es el producto de estos factores.

Por ejemplo: Vamos a calcular m. c. m. (24, 36, 40).

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\qquad$ $40 = 2^3 \cdot 5$

$$\text{m. c. m. } (24, 36, 40) = 2^3 \cdot \underline{3^2 \cdot 5} = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

2 es el factor común 2^3 elevado al mayor exponente.

3 y 5 son los factores no comunes. 3^2 elevado al mayor exponente.

Act.16. Descomponer factorialmente los siguientes números:

a. 330 $\qquad$ b. 900 $\qquad$ c. 2520

Act.17. Calcular el **M.c.d**. y el **m.c.m**. de:

a. 18, 24 y 36 b. 20 y 50 c. 260 y 80

d. 450 y 360 e. 240 y 800 f. 110 y 440

Act.18. Para señalizar el recorrido de una regata se ha colocado una boya cada 15 metros y una baliza cada 42 metros. ¿Cada cuántos metros coincidirán una boya y una baliza?

Act.19. Un granjero ha recogido de sus gallinas 24 huevos morenos y 36 huevos blancos. Quiere envasarlos en envases con la mayor capacidad posible y con el mismo número de huevos (sin mezclar los blancos con los morenos). ¿Cuántos huevos debe poner en cada envase?

Act.20. Decide cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos. Escribe cada uno de los compuestos como producto de dos factores.

13 – 16 – 19 – 2001 – 2332 – 4141 – 33 – 91 – 87 – 45 – 6 – 237

Act.21. Un alumno bosteza en clase cada 24 segundos, otro cada 30 segundos y un tercero (más atento) cada 48 segundos. Si en este momento los tres bostezan a la vez, ¿cuántos segundos tardarán en volver a realizarlo juntos?

Act.22. Calcula:

a. Diez números que tengan como divisor el número 7.
b. ¿Qué son los números que has escrito con respecto al 7?
c. Cinco números de los cuales 98 sea un múltiplo.
d. ¿Qué son los números que has escrito con respecto al 98?

Act.23. Un tramo de escalera de más de 20 peldaños y menos de 30, se puede subir de dos en dos, de tres en tres y de cuatro en cuatro peldaños ¿Cuántos peldaños tiene ese tramo?

Act.24. En un albergue coinciden tres grupos de excursión de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?

Act.25. Una bandeja de bombones de forma cuadrada, tiene igual número de bombones en sus filas y columnas, si en total hay 324 ¿Cuántos bombones hay en cada fila?

7. FRACCIONES Y DECIMALES.

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, con b $\neq 0$.

Una fracción tiene dos términos: a, recibe el nombre de **NUMERADOR** y b, que recibe el nombre de **DENOMINADOR**.

Una misma fracción de números naturales puede tener diferentes significados:

1. Puede hacer referencia a una **parte de la unidad**: Por ejemplo $\frac{4}{7}$; el numerador, 4, indica el número de partes que se toman, mientras que el denominador, 7, indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.
2. Puede representar una **división:** Ejemplo: $\frac{2}{3}$= 2 : 3 = 0,6666…
3. Puede ser un **operador:** Ejemplo: $\frac{2}{3}$de 15 = $\frac{2\cdot 15}{3}=\frac{30}{3}=10$

Una fracción es menor que la unidad (y, por tanto, vale menos de 1) cuando el numerador es menor que el denominador. Por ejemplo: $\frac{3}{7}$. Una fracción es mayor que la unidad (y, por tanto, vale más de 1) cuando el numerador es mayor que el denominador. Por ejemplo: $\frac{7}{3}$.

Fracciones con números enteros:

Observa:

$$\frac{+12}{+6}=(+12):(+6)=+2\Rightarrow\frac{+12}{+6}=\frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{-6}=(-12):(-6)=+2\Rightarrow\frac{-12}{-6}=\frac{12}{6}$$

$$\frac{+12}{-6}=(+12):(-6)=-2\Rightarrow\frac{+12}{-6}=-\frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{+6}=(-12):(+6)=-2\Rightarrow\frac{-12}{+6}=-\frac{12}{6}$$

Toda fracción de **números enteros** se puede escribir como una fracción de **números naturales** que será **positiva** si el numerador y el denominador son iguales y **negativa** si tienen distinto signo.

Fracciones equivalentes:

Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando tienen el mismo valor numérico. Todas las fracciones equivalentes cumplen la propiedad de que sus productos cruzados son iguales:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Por ejemplo: $\frac{-45}{+9}=-5$; $\frac{+15}{-3}=-5 \rightarrow \left.\begin{cases}(-45)\cdot(-3)=+135\\(+9)\cdot(+15)=135\end{cases}\right\}\Rightarrow \frac{-45}{+9}=\frac{+15}{-3}$

Podemos conseguir fracciones equivalentes de dos formas:

- Por **amplificación**: Se multiplican el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$
- Por **simplificación:** Se dividen el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$

Cuando una fracción ya no se puede simplificar más se llama **fracción irreducible.**

Ordenación de fracciones:

Caso 1º Si tienen el mismo denominador: Es mayor el que tengan el numerador mayor.

Ejemplo: $\frac{2}{6};\frac{5}{6};\frac{4}{6}\rightarrow\frac{5}{6}>\frac{4}{6}>\frac{2}{6}$

Caso 2º Si tienen el mismo numerador: Es mayor el que tenga el denominador menor.

Ejemplo: $\frac{1}{6};\frac{1}{10};\frac{1}{3}\rightarrow\frac{1}{3}>\frac{1}{6}>\frac{1}{10}$

Caso 3º Si tienen distintos numerador y distintos denominadores: Se cambian dichas fracciones por otras que sean equivalentes y que tengan el mismo denominador. (Estaremos en el caso 1º)

Ejemplo: Ordenar $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{3}{10}\ y\ \frac{2}{6}$.

Paso I: Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores. m. c. m. (3,5,10,6) = 60

Paso II: Se divide el m. c. m. por cada uno de los denominadores.

Paso III: Cada número obtenido se multiplica por el numerador de la correspondiente fracción.

$\frac{2}{3}=\frac{(60:3)\cdot 2}{60}=\frac{20\cdot 2}{60}=\frac{40}{60}\rightarrow\frac{2}{3}=\frac{40}{60}$ $\frac{4}{5}=\frac{(60:5)\cdot 4}{60}=\frac{12\cdot 4}{60}=\frac{48}{60}\rightarrow\frac{4}{5}=\frac{48}{60}$

$\frac{3}{10}=\frac{(60:10)\cdot 3}{60}=\frac{6\cdot 3}{60}=\frac{18}{60}\rightarrow\frac{3}{10}=\frac{18}{60}$ $\frac{2}{6}=\frac{(60:6)\cdot 2}{60}=\frac{10\cdot 2}{60}=\frac{20}{60}\rightarrow\frac{2}{6}=\frac{20}{60}$

Ya podemos compararlas: $\frac{3}{10}<\frac{2}{6}<\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMAS Y RESTAS DE FRACCIONES

◦ Para sumar o restar fracciones con el **mismo denominador,** se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Ejemplo:

$$\frac{3}{12}+\frac{7}{12}-\frac{4}{12}=\frac{3+7-4}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

◦ Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador,** se reducen a común denominador y después se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador. Ejemplo:

$$\frac{7}{10}-\frac{5}{12}+\frac{3}{5}=\frac{6\cdot 7}{60}-\frac{5\cdot 5}{60}+\frac{12\cdot 3}{60}=\frac{42}{60}-\frac{25}{60}+\frac{36}{60}=\frac{53}{60}$$

m. c. m. (10,12,5) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
60 : 10 = 6
60 : 12 = 5
60 : 5 = 12

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

◦ Para multiplicar varias fracciones, se **multiplican los numeradores entre sí** y el resultado se pone como **numerador**. Después se **multiplican los denominadores entre sí** y se pone el resultado como **denominador.**

Ejemplo: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

◦ Dos fracciones son **inversas entre sí,** cuando al multiplicarlas da **1.**

Ejemplo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{15}=1\Rightarrow\frac{3}{5}\ \ y\ \ \frac{5}{3}$ *son inversas*.

◦ Para **dividir dos fracciones** se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo: $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

POTENCIACIÓN.

Si a y b son dos números enteros, con b≠0, y n, m son números naturales, se cumple.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

RAÍZ CUADRADA.

Si a, b, c y d son números enteros, con b≠0, y n es un número natural, se cumple.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \sqrt{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{b^n}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{c}{d}} \qquad \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)} = \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{c}{d}}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125} \qquad \left(\frac{-5}{36}\right)^0 = 1 \qquad 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{4}\right)^3 = \frac{6^3}{4^3} = \frac{216}{64} = \frac{27}{8} \qquad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right)^{2+1} = \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{4^3} = \frac{-27}{64} \qquad \sqrt{\frac{121}{289}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{289}} = \frac{11}{17}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^6 : \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^{6-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} \qquad \sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)\cdot\left(\frac{36}{81}\right)} = \sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{9} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

$$\left(\sqrt{\frac{100}{49}}\right)^3 = \sqrt{\left(\frac{100}{49}\right)^3} = \sqrt{\frac{100^3}{49^3}} = \frac{\sqrt{100^3}}{\sqrt{49^3}} = \frac{10^3}{7^3} = \frac{1000}{343}$$

$$\sqrt{\left(\frac{144}{169}\right):\left(\frac{4}{25}\right)} = \sqrt{\frac{144}{169}}:\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{12}{13}:\frac{2}{5} = \frac{60}{26} = \frac{30}{13}$$

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES: TRUNCAMIENTO Y REDONDEO.

Para trabajar con números decimales infinitos o números decimales largos, se les aproximan a otros números mediante el truncamiento o el redondeo.

TRUNCAR un número significa suprimir todas las cifras que haya a partir de una determinada.

REDONDEAR un número es conseguir la mejor aproximación con otro que tenga una cantidad determinada de cifras decimales, y depende de la cifra situada a la derecha de la última no suprimida. Si la primera cifra que suprimimos es mayor o igual que 5, entonces, la cifra anterior se aumenta una unidad, es decir, se redondea por exceso. En caso contrario, si la primera cifra eliminada es menos que 5, la cifra anterior se deja como está, es decir, se redondea por defecto.

Por ejemplo:

Número	Aproximación	Truncamiento	Redondeo
2,33375689...	milésimas	2,333	2,334
5,67587654...	milésimas	5,675	2,676
0,01192453....	diezmilésimas	0,0119	0,0119

Act.26. Ayudándote de un dibujo (cuadrado, rectángulo, círculo, polígono regular...), representa las siguientes fracciones:

$$a.\ \frac{5}{5} \qquad b.\ \frac{3}{4} \qquad c.\ \frac{8}{3}$$

Act.27. Añade el término desconocido en las siguientes igualdades:

$$a.\ \frac{3}{13}=\frac{[\ ]}{169} \qquad b.\ \frac{[\ ]}{36}=\frac{-2}{9} \qquad c.\ \frac{7}{5}=\frac{[\ ]}{40}$$

Act.28. Obtén la fracción equivalente irreducible de cada una de las siguientes fracciones:

$$a.\ \frac{144}{96} \qquad b.\ \frac{20}{21} \qquad c.\ \frac{243}{432} \qquad d.\ \frac{75}{105}$$

Act.29. Amador heredó 14000 € a la muerte de su padre, lo que supone $\frac{5}{8}$ de su fortuna. ¿A cuánto asciende ésta?

Act.30. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro necesita un bodeguero para envasar 600 litros de vino?

Act.31. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado como una fracción irreducible:

a. $\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{4}\right)+\frac{7}{2}-\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)=$

b. $1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)-3:\frac{1}{2}=$

c. $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{30}\right)$

d. $3\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}\right):2=$

e. $\left[\left(\frac{1}{3}+3\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)\right]:3=$

f. $10+2\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right):\left[\left(1+\frac{1}{4}\right):\left(3-\frac{1}{3}\right)\right]=$

Act.32. Un amigo le dice a otro: "los $\frac{3}{8}$ del camino al instituto los hago andando". El otro responde: "eso no es nada; yo recorro a pie los $\frac{7}{5}$ del trayecto" ¿Tienen sentido estas frases? Justifica tu respuesta.

Act.33. Un explorador ha dado la vuelta al mundo, recorriendo 42000 Km. Empleó el avión en los $\frac{3}{5}$ de su viaje, el tren en $\frac{1}{20}$ de su recorrido, el barco en $\frac{1}{5}$ y el automóvil en el resto. ¿Cuántos kilómetros viajó en automóvil? ¿Qué fracción representa del total?

Act.34. Calcula las siguientes potencias:

a. 2^3 *b.* 3^{-3} *c.* $(-2)^3$ *d.* $(-2)^{-3}$ *e.* $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

f. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ *g.* $\left(\frac{6}{7}\right)^0$ *h.* $\left(\frac{-2}{7}\right)^{-2}$ *i.* $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}$ *j.* $(-2)^{-4}$

Act.35. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma de una sola potencia:

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$ *b.* $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3:\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{3}$ *c.* $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^5$ *d.* $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2$

e. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-5}$ *f.* $\left(2-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2$ *g.* $\left(\frac{3}{7}\right)^4:\left(\frac{3}{7}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-7}$ *h.* $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3:\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]^{-2}$

Act.36. María, Javier y Carlos se comen cada uno un bocadillo de tortilla durante el recreo. El bocadillo de María tiene dos trozos de $\frac{1}{5}$ de tortilla; el de Carlos un trozo de $\frac{1}{3}$ de tortilla y el de Javier un trozo de $\frac{3}{8}$ ¿Qué bocadillo tiene el trozo de tortilla más grande?

Act.37. En una fiesta había tres botellas de refresco. La primera botella se repartió en diez vasos, la segunda en ocho y la tercera en cinco. Si Juan tomó dos vasos de la primera botella, uno de la segunda y otro de la tercera, ¿cuánto refresco tomó? Expresar el resultado en forma de fracción (de botella).

Act.38. Tres socios invierten dinero en un negocio. El primero aporta $\frac{1}{3}$ del capital, el segundo $\frac{2}{5}$ y el tercero el resto. Al cabo de un año se reparten 3000 € de beneficios. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Act.39. En un puesto de frutas y verduras los $\frac{5}{6}$ del importe de las ventas de un día corresponden a frutas. De la recaudación por venta de fruta, los $\frac{3}{8}$ corresponden a naranjas. Si se han ingresado 85 € por la venta de naranjas, ¿cuánto ha sido la recaudación total del día?

Act.40. De un solar se vendieron los $\frac{2}{3}$ de su superficie y después los $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba. En los 3200 m^2 restantes se construyó un parque. ¿Cuál era la superficie del solar?

Act.41. Se ha llenado hasta la mitad un bidón de aceite, después se han sacado los $\frac{3}{5}$ de su contenido. Si aún quedan 6 litros, ¿Cuál es la capacidad del bidón?

Act.42. Se adquieren 10 Kg. de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, se reduce en $\frac{1}{5}$ su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción $\frac{1}{4}$ de su peso. ¿Cuántos kilogramos de mermelada se obtienen?

8. PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA.

La **razón** de dos números, a y b, es el cociente, $\frac{a}{b}$. Por ejemplo: $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3,5}{12}$ ...son razones.

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*". El cociente de todas las razones que forman una proporción es el mismo, *k*, y se denomina **constante de proporcionalidad**. Los términos *a* y *d* se denominan **extremos**. Los términos *c* y *d* se denominan **medios**. Los términos *a* y *c* se denominan **antecedentes**. Los términos *b* y *d* se denominan **consecuentes**. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} = 0,6 \rightarrow \begin{cases} k = 0,6 \rightarrow Constante \quad de \quad proporcionalidad. \\ 3 \quad y \quad 20 \rightarrow Extremos. \\ 5 \quad y \quad 12 \rightarrow Medios. \\ 3 \quad y \quad 12 \rightarrow Antecedentes. \\ 5 \quad y \quad 20 \rightarrow Consecuentes. \end{cases}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES:

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Dicho de otro modo, los productos cruzados son iguales.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Por ejemplo: $\frac{4}{5}=\frac{8}{10} \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 10 = 40 \\ 8 \cdot 5 = 40 \end{cases}$

OBTENCIÓN DE TÉRMINOS PROPORCIONALES: Si en una proporción conocemos tres de sus cuatro términos, para hallar el valor del cuarto término, el **cuarto proporcional,** utilizamos la propiedad fundamental de las proporciones.

$\frac{3}{4}=\frac{9}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 9 \cdot 4 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{3} \Rightarrow x = 12$. Luego: $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

Llamamos **magnitud** a cualquier característica de un objeto que podemos medir. Son magnitudes: la longitud, la superficie, el volumen, la masa, la capacidad, el precio...No son magnitudes: la bondad, la maldad, la belleza , el compañerismo, el color de pelo…

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número, o lo que es lo mismo, su cociente es constante.

Sean A y B dos magnitudes cuyos valores vienen indicados en la siguiente tabla:

Magnitud A	a	b	c	d	...	n
Magnitud B	a´	b´	c´	d´	...	n´

Si al formar una proporción con los valores de ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma, las magnitudes A y B son directamente proporcionales.

$$\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}=\frac{d}{d´}=...=\frac{n}{n´}=k$$

Por ejemplo: un kilogramo de rosquillas cuesta 4 €; 2 kg, 8 €; 3 kg, 12 €... Las magnitudes son peso y precio. Formamos una tabla de valores:

Peso (kg)	1	2	3	4	...	k · 1
Precio (€)	4	8	12	16	...	k · 4

Al multiplicar la cantidad de kilogramos por un cierto número, aumenta en la misma medida el precio. Al formar las proporciones con ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=0,25$.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA: Para hallar una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes directamente proporcionales, planteamos una regla de tres simple directa. La regla de tres simple directa equivale a calcular el cuarto proporcional en una proporción.

Magnitud A ... Magnitud B

a ______________ b

c ______________ d

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir uno de los valores de una de las magnitudes por un número, el valor de la otra queda dividido o multiplicado, respectivamente, por ese mismo número, o lo que es lo mismo, su producto es constante.

Sean A y B dos magnitudes cuyos valores vienen indicados en la siguiente tabla:

Magnitud A	a	b	c	d	...	n
Magnitud B	a´	b´	c´	d´	...	n´

Para formar proporciones entre dos magnitudes inversamente proporcionales, se toma la razón de dos cantidades de una magnitud y la razón inversa de las cantidades correspondientes de la otra magnitud.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{b'}{a'} \\ \frac{b}{c}=\frac{c'}{b'} \\ \frac{c}{d}=\frac{d'}{c'} \end{array}\right\} \rightarrow a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = d \cdot d'$$

Por ejemplo: para pintar una casa un pintor tarda 48 días; 3 pintores tardan 16 días; 12 pintores, 4 días; 24 pintores tardarían en pintarla 2 días, y 48 pintores emplearían 1 día. Las magnitudes son el número de pintores y los días empleados. Formamos una tabla de valores:

Pintores	1	3	12	24	...	a · k
Días	48	16	4	2	...	b : k

Al multiplicar el número de pintores por un cierto número, el número de días empleado queda dividido por él. Observamos que en las razones de las proporciones se invierte el orden de los valores:

$$\frac{1}{3}=\frac{16}{48} \Rightarrow 1 \cdot 48 = 3 \cdot 16 \qquad \frac{3}{12}=\frac{4}{16} \Rightarrow 3 \cdot 16 = 12 \cdot 4$$

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA: Para conocer una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales, planteamos una regla de tres simple inversa.

Magnitud A ... Magnitud B

a ______________ b

c ______________ d

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow \frac{a}{c}=\frac{d}{b} \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$$

PORCENTAJES

El **tanto por ciento (%)** de una cantidad es tomar de cada cien partes iguales una cierta cantidad indicada por el porcentaje.

Para calcular el tanto por ciento de una cantidad, multiplicamos el porcentaje por la cantidad y lo dividimos entre 100. Por ejemplo: el 40 % de 35 = $\frac{40 \cdot 35}{100} = \frac{1400}{100} = 14$.

Los porcentajes se pueden interpretar desde el punto de vista de las proporciones.
Por ejemplo: el 30% de los 60 alumnos de una clase son chicos. ¿Cuántos chicos hay?

Chicos		Porcentaje
60	______________	100
x	______________	30

$$\rightarrow \frac{60}{x} = \frac{100}{30} \Rightarrow 60 \cdot 30 = 100 \cdot x \Rightarrow 1800 = 100x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1800}{100} = 18 \text{ chicos.}$$

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

Aumentar una cantidad en un porcentaje, x, (x %),es equivalente a calcular el (100 + x) % de dicha cantidad. Por ejemplo: la gasolina ha subido un 2%, si costaba 0,75 € por litro, ¿cuánto costará ahora?

Al aumentar un 2%, lo que antes valía 100 céntimos de euro, ahora cuesta 100 + 2 = 102 céntimos de euro. Por tanto: 102% de 0,75 = $\frac{102 \cdot 0,75}{100} = \frac{76,5}{100} = 0,765 \approx 0,77€$

Disminuir una cantidad en un porcentaje, x, (x %), es equivalente a calcular el (100 – x) % de dicha cantidad. Por ejemplo: una cámara de video cuesta 650 € pero el vendedor me hace una rebaja del 20%. ¿Qué cantidad me ha descontado? ¿Cuánto tengo que pagar?
Calculamos el descuento del 20% que nos hace: 20% de 650 = $\frac{20 \cdot 650}{100} = \frac{13000}{100} = 130€$, es el descuento que me hace. Luego, 650 – 130 = 520 € tendremos que pagar por la videocámara.

Otra forma: al disminuir un 20%, lo que antes costaba 100€, ahora cuesta 100 – 20 = 80 €, por tanto:

80% de 650 = $\frac{80 \cdot 650}{100} = \frac{52000}{100} = 520$ €, tendremos que pagar por la cámara.

ACTIVIDADES

1. Realiza las siguientes operaciones con números enteros:

1) $(+5) + (-3) + (-6) + (-8) =$

2) $(-7) + (-4) + (+9) + (+2) =$

3) $(-7) + (+4) - (-5) - (+6) =$

4) $(+13) - (-12) - (-7) + (-3) =$

5) $(-4) + (-7) - (-8) - (+2) =$

6) $(-8) + (-6) - (+3) - (-1) =$

7) $5 - (3 + 4) + 6 =$

8) $-6 - (5 - 2) - 3 =$

9) $-3 + 4 - [3 - (8 - 2)] =$

10) $-(8 + 9) - [2 - 5 - (3 - 7)] =$

11) $5 - 2 - [5 - (3 - 4) - 5] =$

12) $-[3 - (8 - 6) - (5 + 4)] =$

13) $-(8 - 4) - [3 - (4 - 6) - 2] =$

14) $4 - 5 - [(8 - 7) - (5 + 1)] =$

15) $-(5 - 4) - (2 - 4) - [(14 - 6) - (7 - 8)] =$

16) $-[-(7 + 8) + (4 - 3)] - 2 =$

17) $32 + [7 + (2 - 9)] =$

18) $-32 + [-6 + 7 - (11 + 5)] =$

19) $-(4 + 9 - 13) + 7 + [16 - 7 + (5 - 12)] =$

20) $12 - [(-5 - 7 + 9) + 7] =$

21) $-4 - 6 - (42 - 8) - 5 + [7 - (16 + 9)] =$

22) $-(16 - 9 - 7) - [12 - (5 + 9 - 17)] =$

23) $(-3) + [(-5) - (-(-3))] =$

24) $25 - 12 - (5 + 3 - 7) + 8 - 4 =$

25) $5 - \left[(7 - 1) : 3 + 2 \cdot (3 - 2 + 1)\right] = \; =$

26) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5] =$

27) $-6 \cdot (8 + 7)$

28) $2 \cdot (-6 + 2) =$

29) $(-8 - 6) \cdot (-5) =$

30) $2 \cdot (-6) + 4 \cdot (-2) =$

31) $(-8) \cdot 6 - 5 \cdot 7 =$

32) $7 \cdot 3 - 8 \cdot (-2) =$

33) $-1 \cdot 2 - (-3) \cdot (-4) =$

34) $12 - 7 \cdot (-5) =$

35) $7 - 3 \cdot (-8) =$

36) $(-3) \cdot [12 - (-4)] =$

37) $(-5) \cdot [+(-2) - 3] =$

38) $[-4 - (-2 + 3)] \cdot 5 =$

39) $7 \cdot (-5) + 2 \cdot 4 =$

40) $7 \cdot (-5 + 2 \cdot 4) =$

41) $3 \cdot (-4) + [(7-4+9) \cdot (-6)] =$ 42) $6 \cdot (7+8) - (-5) \cdot 2 - 7 + 4 =$

43) $(5-3) \cdot 8 + 4 - 5 - (6+7) =$

44) $2 \cdot (-3) + 10 - 13 - 8 - 2 \cdot (1-4) =$

45) $(-3+1) \cdot (4-3) - 12 \cdot (-3) =$

46) $8 + 3 \cdot (-3+5) - (6-10) : 2 + 5 =$ 47) $14 - 6 : 2 + 7 - 3 \cdot 4 - 28 : (-4) =$

48) $4 + 36 : 4 - 50 : \left[12 - (-17+4)\right] =$

49) $-3 + 2 \cdot 4 - 6 : 3 + (-2) \cdot (-1) - 12 : (-4) =$

50) $6 - \left[1 + 3 \cdot (2 + 4 : 2)\right] - 6 : (-2) + 1 =$

2. Alba vive en un edificio de 12 plantas y dos plantas más para garaje en el sótano. Su madre aparca el coche en el 2º sótano y sube 8 plantas para llegar a casa.

   a. ¿En qué planta viven?
   b. Si Alba sale de casa, baja 4 pisos para ir a casa de su amiga y más tarde sube 9 pisos, ¿qué desplazamiento tendrá que hacer para llegar al coche?

3. La temperatura de un congelador desciende 3º C cada 6 minutos hasta llegar a – 20 º C. Ponemos en marcha el congelador a las 11 de la mañana, cuando la temperatura es de 24º C. ¿A qué hora alcanzará la temperatura de -18º C?

4. Un buzo que hace trabajos en una obra submarina se encuentra en la plataforma base a 6 m sobre el nivel del mar y realiza los desplazamientos siguientes:

   a. Baja 20 metros para dejar material.
   b. Baja 12 metros más para hacer una soldadura.
   c. Sube 8 metros para reparar una tubería.
   d. Finalmente, vuelve a subir a la plataforma. ¿Cuántos metros ha subido en su último desplazamiento hasta la plataforma?

5. En un edificio hay tres sótanos, la planta baja y nueve plantas más. Un ascensor va desde el sótano -2 hasta la planta 8. ¿Cuántas plantas ha recorrido?

6. Un avión vuela a 3 500 metros de altura y un submarino está sumergido en el mar 40 metros. ¿Qué altura en metros los separa?

7. Alejandro Magno, uno de los más grandes generales de la historia, nació en 356 a.C. y murió en 323 a.C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años hace de eso?

8. Un día de invierno amaneció a dos grados bajo cero. A las doce del mediodía la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cinco de la tarde subió 3 grados más. Desde las cinco a medianoche bajó 5 grados, y de medianoche al alba, bajó 6 grados más. ¿A qué temperatura amaneció el segundo día?

9. Expresa en forma de potencia los siguientes productos:

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$
b. $12 \cdot 12 =$
c. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$
d. $25 \cdot 25 \cdot 25 =$
e. $15 \cdot 15 =$
f. $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$
g. $-7 \cdot 7 =$
h. $2 \cdot 4 \cdot 8 =$

10. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a. $3^4 =$ *b.* $(-2)^5 =$ *c.* $-4^2 =$ *d.* $(-3)^0 =$
e. $1^7 =$ f. $10^5 =$ g. $(-12)^1 =$ h. $4^3 =$
i. $(-10)^3 =$ j. $7^0 =$ k. $-3^3 =$ l. $(-7)^2 =$

11. Reduce y expresa el resultado en forma de una única potencia:

a. $2^4 \cdot 2^3 =$ *b.* $3^4 \cdot 3^6 =$ *c.* $6^3 : 6^4 =$ *d.* $(-3)^7 : (-3)^3 =$
e. $6^5 \cdot 6^4 \cdot 6 =$ f. $(-9)^{23} : (-9)^{12} =$ g. $(5^8)^9 =$
h. $(-2)^4 \cdot 7^4 =$ i. $18^8 : (-6)^8 =$

12. Completa los números que faltan:

a. $(-3)^5 \cdot (-3)^2 = (-3)^{----}$
b. $4^3 \cdot 4^{----} = 4^8$
c. $(4^3)^{----} = 4^{12}$
d. $(-5)^5 : (-5)^{----} = 25$
e. $[(-8)^3]^{----} = 1$

13. Calcula:

a. $(3-5)^2 - (-3 \cdot 2 - 3^2) - 2^3 =$
b. $(-2)^8 : (-2)^3 + 12 - 18 : 3 + (5 + 3^0) : (-2) =$
c. $7^2 + 5^4 : 5^2 - 5^0 \cdot 4^2 - 81 : 3^2 =$
d. $5^2 + (-3^2) + 2 \cdot (-2 + 5^0)^3 - (-2)^2 =$
e. $9^2 + 12 : 3 - 10 + (3^2 - \sqrt{4} + 2 \cdot 3) + \sqrt{81} =$

14. Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias y expresa el resultado en forma de potencia:

a. $(5^2)^3 \cdot 5^5 : (5^4)^2 =$
b. $(3^5 \cdot 2^5) : (6 \cdot 6^2) =$
c. $18^7 : \left[(18^3)^4 : 18^7\right] =$
d. $(-3)^5 \cdot \left[(-3)^2\right]^3 : (9^2)^2 =$
e. $(18^5 : 2^5) : (3 \cdot 3^2) =$
f. $\left[(-7)^3\right]^9 : \left[(-7)^{15} : (-7)\right] =$

15. Calcula el valor de las siguientes raíces:

a. $\sqrt{81} =$
b. $\sqrt{49} =$
c. $\sqrt{64} =$
d. $\sqrt{1} =$
e. $\sqrt{225} =$
f. $\sqrt{121} =$
g. $\sqrt{625} =$
h. $\sqrt{169} =$
i. $\sqrt{256} =$
j. $\sqrt{400} =$
k. $\sqrt{250000} =$

16. La raíz de un número es 324 y el resto es 16, ¿cuál es ese número?

17. Halla las raíces cuadradas de los siguientes números. ¿Cuáles son cuadrados perfectos? ¿Por qué?

a. 245	c. 1225	e. 21
b. 400	d. 978	f. 2489

18. Calcula las raíces de los siguientes productos y cocientes sin efectuarlos previamente.

a. $\sqrt{144:36} =$ c. $\sqrt{81 \cdot 121} =$

b. $\sqrt{25 \cdot 16} =$ d. $\sqrt{64:25} =$

19. Una pista deportiva de forma cuadrada tiene una superficie de 900 m^2. Un alumno da 15 vueltas alrededor de la pista. ¿Cuántos metros ha recorrido?

20. En clase de Educación Física, los 97 alumnos de 1º de E. S. O. han formado un cuadrado y han quedado alumnos sin colocar. ¿De cuántas filas y columnas será el cuadrado? ¿Cuántos alumnos han quedado sin colocar?

21. Coloca las raíces que faltan para que se cumplan estas igualdades:

a. $81 + 5^2 = 34$ b. $2 \cdot (144 + 4) = 28$

22. Para una repoblación forestal en un terreno cuadrado, se dispone de 350 árboles disponiéndolos en igual número de filas que de columnas. ¿Cuántos árboles habrá en cada fila? ¿Cuántos árboles sobrarán?

23.
a. Halla todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 49 y 66.

b. Halla todos los divisores de 24.

24. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tu respuesta.

a. 125 está contenido exactamente 8 veces en 1000.

b. 36 es divisible entre 12.

c. 25 es divisor de 5.

d. Todos los múltiplos de 2 y 3 son también múltiplos de 5.

e. 8 es múltiplo de 16

f. 70 es múltiplo de 15.

25. De los siguientes números indica cuáles son primos y cuáles compuestos.

17 53 15 81 49 27 57 111 23 186 47

26. Descompón en producto de dos factores:

a. 675 b. 96

27. Descompón en factores primos:

a. 42 b. 108 c. 180

28. ¿Qué números tienen las siguientes descomposiciones factoriales?

a. $2^2 \cdot 5^2$ b. $3^2 \cdot 7$ c. $2 \cdot 5 \cdot 7^2$

29. Calcula:

a. M. C. D (120, 252) = b. m. c. m (12, 30, 45) =

30. En un árbol de Navidad hay bombillas rojas, verdes y amarillas. Las primeras se encienden cada 15 segundos, las segundas cada 18 y las terceras cada 10.

a. ¿Cada cuántos segundos coinciden las tres bombillas encendidas?
b. En una hora, ¿cuántas veces se encienden a la vez?

31. La clase de 1º A tiene 32 alumnos y la de 1º B tiene 36. Queremos distribuir a los alumnos en equipos del mismo número de participantes de manera que no falte ni sobre nadie y no se mezclen en el mismo equipo alumnos de clases distintas. ¿Cuántos alumnos, como máximo, podrán entrar en cada grupo?

32. María y Juan se turnan para visitar a sus abuelos. Ella va cada cuatro días y él cada seis. ¿Cuándo coinciden? ¿Cuántas visitas ha hecho cada uno cuando coinciden por primera vez?

33. Un viajante va a Sevilla cada 18 días, otro va a cada 15 días y un tercero va a Sevilla cada 8 días. El día 10 de Enero han coincidido en Sevilla los tres viajantes. ¿Cuándo será la próxima vez que vuelvan a coincidir?

34. Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y en la caja B tiene bolsitas de 20 botones. El número total de botones de la caja A es el mismo que el número total de botones de la caja B. ¿Cuántos botones hay, como mínimo, en cada caja?

35. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.

a. ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?
b. ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

36. Tres aviones de línea regular salen del aeropuerto cada 3 días, cada 12 días y cada 18 días. ¿Cada cuántos días saldrán los tres aviones a la vez?

37. Queremos cubrir el suelo de una habitación rectangular de 82 dm de largo por 44 dm de anchura con baldosas cuadradas tan grandes como sea posible. Calcula el lado de cada baldosa y su superficie.

38. Un día que iba por la calle, José Luis se dedicó a contar todas las ruedas que veía. Al final contó 318 ruedas. Si no vio ningún camión ni vehículo grande, ni contó las de repuesto, ¿son todas de coche? ¿Por qué?

39. Dos líneas de autobuses urbanos coinciden en la misma parada a las 8 de la mañana. Si su frecuencia de paso es de 10 y 12 minutos respectivamente, ¿cada cuánto tiempo volverán a coincidir en la parada? ¿Cuántas veces lo harán entre las 8 y las 12 de la mañana?

40. Tres barras de hierro miden 810 mm, 72 cm y 6 dm. Queremos dividirlas en trozos de igual longitud y lo más grande posible. Calcula la longitud de cada trozo y el número de trozos que obtendremos de cada barra.

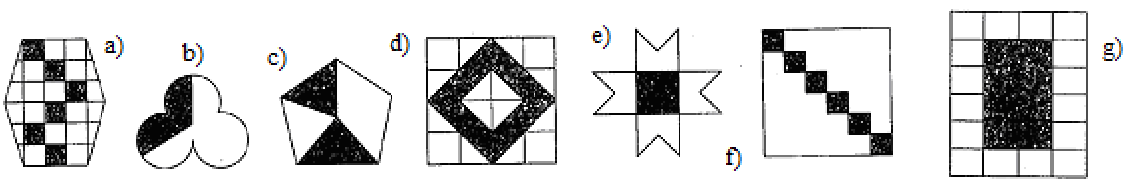
41. Responde a las siguientes cuestiones:

   a. Halla la expresión decimal de $\frac{3}{8}$.
   b. Encuentra el término que falta: $\frac{17}{18} = \frac{34}{[\ ]}$.
   c. Halla un número sabiendo que sus $\frac{5}{7}$ son 25.
   d. ¿Cuál de las fracciones siguientes: $\frac{-1}{-3}, \frac{2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{-12}, \frac{5}{15}$, no es equivalente a las demás?
   e. La fracción de hora que representan 8 minutos es:

42. Ordena de forma decreciente las siguientes fracciones: $\frac{-5}{2}, \frac{3}{4}, 4, \frac{1}{9}, \frac{-1}{7}, \frac{8}{5}, -2$

43. Una familia gasta $\frac{1}{15}$ de su sueldo en el alquiler del piso, $\frac{1}{60}$ de su sueldo en teléfono y electricidad y $\frac{1}{8}$ de su sueldo en transporte y ropa.
   a. ¿Qué fracción del sueldo se gasta la familia en alquiler, teléfono, electricidad, transporte y ropa?
   b. ¿Qué fracción del sueldo le queda para comer y para el ahorro que hace?
   c. ¿Cómo se distribuyen sus gastos si la familia tiene unos ingresos mensuales de 1200 €?

44. Escribe una fracción que represente la parte rayada en relación con el total, de cada una de las siguientes figuras:



45. Obtén la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones:

a. $\frac{320}{1600}$ *b.* $\frac{-56}{72}$ *c.* $\frac{125}{60}$ *d.* $-\frac{54}{81}$ *e.* $\frac{175}{180}$

46. Calcula:

$a.\ (-2)^6 \quad b.\ -2^6 \quad c.\ (-2)^3 \quad d.\ (-2)^0 \quad e.\ 3^{-3} \quad f.\ (-2)^{-5}$

$g.\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \quad h.\ \left(\frac{-2}{7}\right)^{-2} \quad i.\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-2}$

47. Calcula:

$a.\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \quad b.\ \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \quad c.\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

$d.\ \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \quad e.\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \quad f.\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \frac{4}{5} =$

48. Calcula utilizando las propiedades de las potencias:

$a.\ \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad b.\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

49. Calcula las siguientes potencias:

$a.\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \quad$ b. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \quad$ c. $1^{-12} =$

$d.\ 5^{-2} \cdot 5^3 = \quad$ e. $7^{-2} \cdot 7^{-6} = \quad$ f. $10^{21} \cdot 10^5 =$

$g.\ 7^{-2} : 7^3 = \quad$ h. $9^0 : 9^3 = \quad$ i. $6^{-2} : 6^{-5} =$

$j.\ \left(7^{-2}\right)^3 = \quad$ k. $\left(6^{-2}\right)^{-5} = \quad$ l. $\left(9^0\right)^3 =$

50. Un jugador pierde la cuarta parte del dinero que lleva y más tarde la mitad de lo que le queda. Suponiendo que se retira del juego, después de estas pérdidas, con 300€, ¿cuánto tenía al principio?

51. Borja gastó el sábado la mitad del dinero que le dio su padre para toda la semana. El domingo gastó la tercera parte de lo que le quedaba. Y ya sólo le queda lo justo para el autobús que tiene que coger los restantes días de la semana para ir al instituto (1,30 euros el billete de ida y vuelta). ¿Cuánto dinero le dio esta semana su padre?

52. Calcula, simplificando lo resultados cuando sea posible:

a. $\frac{6}{7}$ de 945= $\quad$ b. $\frac{2}{5}$ de 325 =

c. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} - \frac{3}{7} =$ $\quad$ d. $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5} =$

e. $12:\frac{2}{7}:\frac{4}{5}=$

f. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{7}\right)=$

g. $\frac{2}{7}-3\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{9}\right)+16=$

h. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}:\frac{4}{7}-2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)=$

i. $\left(\frac{2}{4}+6-\frac{5}{3}\right):\left(1+\frac{4}{5}\right)=$

j. $\frac{7}{10}+3-3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{4}\right)=$

k. $\frac{2}{5}:\left[\frac{3}{5}-2\cdot\left(1-\frac{9}{10}\right)\right]=$

l. $5-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{5}:3=$

53. Calcula:

a. $\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=$

c. $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}=$

d. $\left(\frac{7}{12}\right)^{0}=$

e. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}=$

f. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}=$

g. $\sqrt{\frac{9}{49}}=$

h. $\sqrt{\frac{27}{75}}=$

i. $\sqrt{\frac{144}{121}}=$

j. $\sqrt{\frac{24}{54}}=$

k. $\sqrt{\frac{72}{100}}=$

l. $\sqrt{\frac{3^2}{5^2}}=$

54. Redondea y trunca las siguientes cantidades a la posición decimal que se indica:

a. 0,2355874112 (cienmilésimas)

b. 12,458877 (milésimas)

c. 7,55699821 (centésimas)

d. 5,441227889 (diezmilésimas)

e. 1,49922 (milésimas)

f. 0,494949 (centésimas)

55. Escribe mediante redondeo una aproximación de cada uno de los siguientes decimales.

Decimal	**2,3458**	**85,5758**	**0,008**	**855,93**	**0,1005**
Aproximación a las centésimas					
Aproximación a las décimas					
Aproximación a las unidades					

56. ¿Cuántas grapas de 2,3 cm de largo se pueden fabricar con un alambre de 200 metros, sabiendo que hay una pérdida de 2 mm de alambre por cada grapa que se fabrica?

57. Una amiga me pidió que le pasase un trabajo a ordenador. El primer día pasé $\frac{1}{4}$ del total del trabajo, el segundo $\frac{1}{3}$ de lo restante; el tercero $\frac{1}{6}$ de lo que faltaba y el cuarto lo concluí, pasando los 30 folios que quedaban. ¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el trabajo?

58. Determina cuáles de estas magnitudes son proporcionales. De las proporcionales distingue las que sean directamente proporcionales de las inversamente proporcionales:

a. El número de litros de agua y el número de botellas iguales que las contiene.
b. La cantidad de alimentos que come una persona y su peso.
c. El número de libros que caben en una estantería y el grosor de éstos.
d. El número de sandías (iguales) que haya en un camión y el peso de éste.
e. El peso de una persona y la distancia que es capaz de andar en un día.
f. La velocidad que corre una moto y el tiempo que tarda en recorrer 100 km.
g. El número de operarios y el número de paraguas que hacen en un día.
h. El número de operarios y el tiempo que utilizan para hacer 50 paraguas.

59. Calcula el valor de x en las siguientes proporciones:

a. $\frac{3}{5}=\frac{6}{x}$ b. $\frac{10}{15}=\frac{x}{6}$ c. $\frac{7,5}{x}=\frac{6,25}{23,4}$

60. Una persona mecanografía a una velocidad de 1 680 pulsaciones cada 8 minutos. ¿Cuántas pulsaciones puede realizar en 100 segundos?

61. Si seis trabajadores han tardado 15 días en realizar cierto trabajo, ¿cuánto tardarían nueve trabajadores en terminar la misma tarea?

62. Completa la tabla siguiente, para que sus valores correspondan a magnitudes directamente proporcionales:

Magnitud A	4		6	7	
Magnitud B	16	20			32

63. Completa la tabla siguiente, ara que sus valores correspondan a magnitudes inversamente proporcionales:

Magnitud A	2	4	5	6	
Magnitud B	40				10

64. Un equipo formado por tres personas, Victoria, Mercedes y Carlos, ha realizado cierto trabajo. Victoria ha invertido 15 horas; Mercedes, 12 horas, y Carlos, 8 horas. Si les pagan por el trabajo 441 €, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

65. Si 180 termitas precisaron 12 horas para hacer desaparecer una puerta de madera, ¿cuántas termitas harían desaparecer la misma puerta en cuatro horas?

66. Un ganadero tiene 36 vacas y heno para alimentarlas durante 24 días. Si decide comprar 18 vacas más, ¿para cuántos días tendrá heno?

67. Un artesano fabrica 21 jarrones en 3 días. ¿Cuántos jarrones producirá en 2 días? ¿Cuántos días tardará en realizar 280 jarrones?

68. Un empresario decide repartir 8400 euros entre cuatro empleados de manera directamente proporcional al número de horas diarias de trabajo de cada uno de ellos. Calcula la cantidad que deberá recibir cada empleado si trabajan, respectivamente: 5 h, 6 h, 8 h y 9 h.

69. Cuatro transportistas necesitaron 6 horas de trabajo para descargar un camión.

    a. ¿En cuánto tiempo hubieran descargado el camión tres transportistas?

    b. ¿Cuántos transportistas son necesarios para descargar ese mismo camión en 2 horas?

70. Para cocer arroz un cocinero utiliza siete partes de agua por dos de arroz. ¿Qué tazas de agua han de echarse por 7 de arroz?

71. Un automóvil gasta 8 litros de gasolina cada 100km. Si quedan 7 litros en el depósito, ¿cuántos km podrá recorrer el vehículo?

72. Juan, Luisa y María tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 €. Compraron entre los tres un décimo de lotería y han obtenido un premio de 500 €. ¿Cómo deben repartírselo?

73. Un barco que navega a 24 km/h ha tardado en hacer un recorrido 12 horas. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido otro barco que navega a 32 km/h?

74. Una cuadrilla de soldadores, trabajando 8 horas diarias, renueva la acera de una calle en 15 días. ¿Cuánto tardarían si trabajaran 10 horas diarias?

75. Una merluza de dos kilos y trescientos gramos, ha costado 28,75 €. ¿Cuánto pagaré por otra más pequeña de kilo y medio?

76. Halla los siguientes porcentajes:

a.El 50 % de 12 =	e. El 2,5 % de 5000 =
b. El 12 % de 5 =	f. El 11,2 % de 19266 =
c. El 125 % de 24 =	g. El 2,9 % de 1818 =
d. El 30 % de 50 =	h. El 6,4 % de 1595=

77. Halla el valor de x:

a. El 20 de x es 4	c. El 15% de x es 50
b. El 25 % de x es 10	d. El 24% de x es 27

78. En una prueba de tipo test de 300 preguntas, deben contestarse correctamente más del 65% para aprobar. ¿Cuántas preguntas tiene que contestar para poder aprobar?

79. Una superficie comercial celebra su décimo aniversario aplicando un descuento del 15% en todos sus productos. Ana aprovecha la ocasión para comprarse un vestido que vale 99 euros, sin descuento. ¿Cuánto le rebajarán?
¿Cuánto deberá pagar?

80. Por la compra de libros, debes pagar un I. V .A. del 6%. Si compras un libro marcado con 15 euros, sin I. V .A., ¿Cuánto deberás pagar al final?

81. Un trabajador cobra 2324 €, al mes le han aumentado el sueldo un 4%. Calcula cuanto cobrará tras el aumento.

82. El 3% de los alumnos de un colegio llevan gafas. Hay 12 alumnos con gafas. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio?

83. Los peces de colores de la colección que tenía Juan contrajeron una enfermedad. El 70% de ellos murió. Si sobrevivieron 60, ¿cuántos peces tenía Juan?

84. Un horno se vende por 180 euros; de esta venta se obtiene un 20% de beneficio sobre el precio de coste. ¿Cuál es el precio de coste?

85. Una novela se vende a 10 euros, obteniéndose un beneficio del 8% sobre el precio de coste. ¿Cuál es el precio de coste?

86. Unos pantalones vaqueros se venden por 43 euros. Así se consigue un beneficio del 25% sobre su precio de coste. ¿Cuál es el precio de coste?

87. Al comprar en periodo de rebajas una camisa que costaba 42 € me hacen un descuento del 12%. ¿Cuál es ahora su precio?

88. Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba 90 €. Cuando llegué a la tienda, este tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él? En la misma tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella 9,75 €. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

89. El precio de una bicicleta ha aumentado un 20 % con respecto al año pasado. Si ahora cuesta 480 €, ¿cuál era el precio de la bicicleta el año pasado?

90. Un jugador de baloncesto ha efectuado 25 lanzamientos y ha conseguido 16 canastas. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

91. La barra de pan ha subido un 10%, y ya cuesta 0,55 €. ¿Cuánto costaba antes de la subida?

92. Un embalse está al final del verano al 23% de su capacidad. Si en ese momento contiene 35 decámetros cúbicos de agua, ¿cuál es la capacidad total del embalse?

Unidad 1: Introducción al lenguaje algebraico.

¿Qué es el Álgebra? Existen enunciados o expresiones que resultan muy largas al expresarlas con palabras. Para hacerlas más sencillas de manejar se emplean símbolos y nuevas "palabras". A la parte de las matemáticas que estudia el manejo de estos símbolos se le llama **Álgebra**.

El **lenguaje algebraico** utiliza números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas básica (+, - , · , ÷). Las "palabras" que utiliza el Álgebra reciben el nombre de expresiones algebraicas. Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras relacionados entre sí mediante operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división). Las expresiones algebraicas son el resultado de expresar en lenguaje matemático un enunciado en el que aparecen datos desconocidos, los cuales representamos con letras. Las letras se denominan **variables**, **incógnitas** o **indeterminadas**.

El signo de multiplicar, " · ", no suele escribirse entre dos letras o entre un número y una letra.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

Enunciado	Expresión algebraica	Valor	Valor numérico
El doble de un número.	2x	x = 3	2 · 3 = 6
Un número impar.	2a + 1	a = – 1	2 · (– 1) + 1 = – 2 + 1 = – 1
La suma de dos números.	m + n	m = 3 ; n = – 4	3 + (– 4) = 3 – 4 = – 1
La mitad de un número.	$\frac{y}{2}$	y = 8	$\frac{8}{2} = 4$

Las expresiones algebraicas más sencillas que hay son los monomios. Un **monomio** es una expresión algebraica formada por productos de números y letras elevadas a exponentes naturales.

Por ejemplo: 3x, – 2ab, $-\frac{3}{5}xy^3$ ...son ejemplos de monomio, mientras que $\sqrt{3x}$, 4z - 8 ó $\frac{2}{b-1}$ serían ejemplos de expresiones algebraicas que no son monomios.

En un monomio se distinguen dos partes: el **coeficiente**, número que está multiplicando a las letras, y la **parte literal**, las letras con sus exponentes. Si no aparece escrito ningún número, el coeficiente del monomio será 1.

Ejemplos:

$3\underline{ab}$

Coeficiente

Parte literal

$\frac{1}{2}\underline{x^2}$

Coeficiente

Parte literal

El **grado de un monomio** es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su parte literal. Dos **monomios** son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Por ejemplo:

Monomio	Grado
4xyz	3
$\frac{2}{3}ab^3$	4
– m	1
7	0

Ejemplos de monomios semejantes: $7x^2y$, $-x^2y$, $\frac{9}{4}x^2y$...

Act. 1. Expresa los siguientes enunciados en lenguaje algebraico:

a. El triple de un número menos dos.
b. La suma de un número y su anterior.
c. Un número impar.
d. El cuadrado de un número menos su doble.
e. La edad de una persona hace tres años.
f. El producto de dos números consecutivos.
g. La suma de un número con otro diez unidades mayor.
h. El 75% de un número.
i. La edad de una persona dentro de doce años.
j. Número de patas de un rebaño tras la muerte de 6 ovejas.

Act. 2. Expresar en lenguaje ordinario las siguientes expresiones:

a. $\frac{x^2}{2}$ b. $a\cdot(a+1)$ c. $2x-(2y+1)$

d. x^2-y^2 e. $(a-b)^2$ f. $(m+n)\cdot(m-n)$

Act. 3. Indica el grado y el coeficiente de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles de ellos son semejantes.

a. $-5xy$ b. $(-3a)^3$ c. x^2y^2 d. $(xy)^2$

e. $\frac{2}{3}x^2y^2$ f. $\frac{1}{6}a^3$ g. $\frac{-2xy}{5}$ h. $-x^2$

Act. 4. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican en cada caso.

a. $5x + 3a^2$ para x = – 1 y a = 3.
b. $\frac{2}{5}ab^3$ para a = 5 y b = – 2
c. $\frac{4}{x} - 3xy$ para x = – 2 e y = 2.

OPERACIONES CON MONOMIOS.

Como en los monomios las letras representan números, podemos hacer con ellos las mismas operaciones que realizamos con los números y de la misma manera.

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS.

Para sumar o restar monomios semejantes, se suman o se restan sus coeficientes y se mantiene la misma parte literal. Si los monomios no son semejantes, se deja la operación indicada.

$$3xy^2 + 7xy^2 - 2x - 8x = (3 + 7)\,xy^2 + (-2 - 8)\,x = 10xy^2 - 10x$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE MONOMIOS.

Para multiplicar o dividir monomios, se multiplican o se dividen sus coeficientes por un lado y sus partes literales por otro, teniendo en cuenta las propiedades de las potencias. Para multiplicar monomios no es necesario que sean semejantes.

$$7ab \cdot (-4a^3b) = [7 \cdot (-4)] \cdot (a^{1+3} \cdot b^{1+1}) = -28a^4b^2$$

$$(12x^2y) : (-3xy) = [12:(-3)]\cdot(x^2 : x)\cdot(y : y) = -4x$$

Act. 5. Realiza las siguientes operaciones y reduce términos semejantes cuando sea posible:

a. $6a^2 - 3a^2 + a^2 =$
b. $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 1 =$
c. $2x + 7y - 3x - x + 5y =$
d. $3x^2y - 2xy^2 + 1 =$
e. $a^2b \cdot (-3a^3b^5) =$
f. $\left(\frac{1}{3}xy\right)\cdot\left(-6x^2\right)\cdot z =$
g. $-12x^3y^4z^2 : 3xy^2 =$
h. $ab^6 : 5ab^2 =$
i. $5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x) =$

POLINOMIOS.

La suma o resta de varios monomios se llama **polinomio**. Cada uno de los sumandos se llama término del polinomio. El término que no tiene parte literal se llama **término independiente.**

Los polinomios se designan con una letra mayúscula seguida de un paréntesis que encierra la variable. Por ejemplo: $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ es un polinomio formado por la suma de cuatro monomios, x^3, $-2x^2$, $3x$ y 1. Se suele designar como $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Los polinomios formados por la suma de dos monomios reciben el nombre de **binomios**, y los formados por la suma de tres se llaman **trinomios.**

Por ejemplo: $Q(x) = x^4 - 3$ es un binomio mientras que $R(x) = x^2 + 2x - 1$ es un trinomio.

El **grado de un polinomio** es el del monomio de mayor grado de los monomios que lo componen. Por ejemplo: el grado del polinomio $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ es 3.

El **valor numérico de un polinomio** es el valor que resulta al sustituir las letras por los valores indicados y realizar las operaciones.

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO	VALOR	VALOR NUMÉRICO
$2x^3 - 3x - 1$	$2x^3$; $-3x$; -1	-1	3, que es el grado de $2x^3$	$x = -1$	$2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 1 =$ $= -2 + 3 - 1 = 0$
$-2xy + 9$	$-2xy$; 9	9	2, que es el grado de $-2xy$	$x = 2$ $y = 0$	$-2 \cdot 2 \cdot 0 + 9 = 9$
$-5x$	$-5x$	0	1, que es el grado de $-5x$	$x = 3$	$-5 \cdot 3 = -15$

Puede ser que en un polinomio aparezcan varios términos del mismo grado, es decir, semejantes. En este caso se suelen sumar entre sí los términos semejantes y obtenemos el **polinomio reducido**.

Por ejemplo: $5x^3 + 6x^2 - 4x^3 - 12x^4 + 9x - 6x + 9 - 5 = \underbrace{x^3 + 6x^2 - 12x^4 + 3x + 4}_{\text{Polinomio reducido}}$

Polinomio ordenado: los términos de un polinomio se suelen ordenar según su grado, generalmente de mayor a menor grado. Para ordenar un polinomio debemos ponerlo antes en su forma reducida.

En el ejemplo anterior:

$$5x^3 + 6x^2 - 4x^3 - 12x^4 + 9x - 6x + 9 - 5 = \underbrace{x^3 + 6x^2 - 12x^4 + 3x + 4}_{\text{Polinomio reducido}} = \underbrace{-12x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 4}_{\text{Polinomio ordenado}}$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS.

SUMA DE POLINOMIOS.

Recordemos que sólo es posible sumar monomios semejantes, en consecuencia, para sumar polinomios basta reducir términos semejantes.

$$(2x^3 – 5x^2 + 2x – 3) + (7x^2 – 5x^3 – 2x + 8) = – 3x^3 + 2x^2 + 5$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS.

RESTA DE POLINOMIOS.

Dado un **polinomio** cualquiera su **opuesto** es otro polinomio que sumado con él da el polinomio nulo. Hallarlo es muy sencillo, pues basta cambiar de signo todos los monomios que lo forman. Por ejemplo: dado el polinomio $P (x) = x^3 + 2x^2 + 2x – 3$, su opuesto es el polinomio $– P (x) = – x^3 – 2x^2 – 2x + 3$.

Para restar dos polinomios se le suma al primero el opuesto del segundo.

$(2x^3 – 5x^2 + 2x – 3) – (7x^2 – 5x^3 – 2x + 8) =$
$= (2x^3 – 5x^2 + 2x – 3) + (– 7x^2 + 5x^3 + 2x – 8) = 7x^3 – 12x^2 + 4x – 11$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN POLINOMIO.

Para multiplicar un número por un polinomio se multiplica dicho número por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

$$(– 3) \cdot (2x^2 – 3x – 2) = – 6x^2 + 9x +6$$

Lo que acabamos de hacer no es más que aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

PRODUCTO DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica dicho monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

$$\left(\frac{3}{2}x^3\right)\cdot\left(6x^2-2x+1\right)=9x^5-3x^4+\frac{3}{2}x^3$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS.

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de los que componen uno de los factores por todos y cada uno de los monomios que componen el otro factor.

$$\left(3x^3-2x+1\right)\cdot\left(2x-2\right)=6x^4-6x^3-4x^2+4x+2x-2=6x^4-6x^3-4x^2+6x-2$$

Act. 6. Escribe:

a. Un polinomio ordenado sin término independiente.
b. Un polinomio no ordenado y completo.
c. Un polinomio completo sin término independiente.
d. Un polinomio de grado 4, completo y con coeficientes impares.

Act. 7. Efectúa las siguientes operaciones:

a. $-\left(2x^3-7x^2+3\right)+\left(-x^3+5x^2-8x\right)=$
b. $\left(3x-2\right)\cdot\left(7x^2-2x\right)=$
c. $3x^2\cdot(x-2)\cdot\frac{2}{3}\left(x^3-2x\right)=$
d. $x\cdot(x^2-5)+3x^3+5x-4x^3=$
e. $\left(m^2-1\right)\cdot\left(2x+3\right)-2x^2\cdot\left(3x-5\right)=$

PRODUCTOS O IDENTIDADES NOTABLES.

Existen tres productos de binomios que por su gran utilidad para simplificar cálculos y por la frecuencia que aparecen al realizar operaciones algebraicas, resulta necesario memorizarlos. Dichos productos son:

- **<u>CUADRADO DE UNA SUMA</u>:** "el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo."

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+b^2+2ab\Rightarrow(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

- **<u>CUADRADO DE UNA DIFERENCIA</u>:** "el cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo."

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2+b^2-2ab\Rightarrow(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

- **<u>SUMA POR DIFERENCIA</u>:** "la suma de dos expresiones por la diferencia de ambas es igual al cuadrado de la primera expresión menos el cuadrado de la segunda expresión."

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2\Rightarrow(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Act. 8. Usando las fórmulas de las identidades notables, desarrolla las siguientes expresiones:

a. $(2x-3)^2=$
b. $\left(a+\frac{3}{2}\right)^2=$
c. $\left(x-3y^2\right)^2=$
d. $(2a+3)\cdot(2a-3)=$
e. $\left(1-\frac{2}{3}x\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3}x\right)=$

EXTRACCIÓN DE FACTOR COMÚN.

Extraer factor común en una expresión algebraica es transformar la expresión en otra en la que aparece el producto del factor extraído por una suma.

Para sacar factor común en una expresión algebraica, debe estar dicho factor contenido en cada uno de los sumandos que componen la expresión.

La extracción de factor común en una expresión algebraica permite su factorización, esto es, transformar sumas y restas en productos.

$2x^3 - 4x^2 + 2x = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 = 2x \cdot (x^2 - 2x + 1)$

Observemos que el factor 2x aparece en todos los sumandos de la expresión.

Podemos extraer factor común 2x.

$x^6 y^3 + 5x^4 y^2 + 2x^2 y = x^2 y \cdot x^4 y^2 + x^2 y \cdot 5x^2 y + x^2 y \cdot 2 = x^2 y \cdot (x^4 y^2 + 5x^2 y + 2)$

Observemos que el factor x^2 y aparece en todos los sumandos de la expresión.

Podemos extraer factor común x^2 y.

Act. 9. Extrae factor común:

a. $12x^3 - 8x^2 - 4x =$
b. $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 =$
c. $3a^2b - 3a^2 + 9a^2b^2 =$
d. $m^2n - n^2m =$
e. $10u^3v^2 - \frac{1}{2}u^2v + 4v^4u =$

ACTIVIDADES

1. El conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) se denomina:
   a. Expresión algebraica.
   b. Valor numérico.
   c. Monomio.
   d. Parte literal.

2. Expresa en lenguaje algebraico:

   a. La suma de un número y su mitad.
   b. La mitad del siguiente de un número.
   c. El triple de la mitad de un número.
   d. La suma de un número y su anterior.
   e. La suma de tres números naturales consecutivos.
   f. El doble de un número más el cuadrado de ese mismo número.
   g. El doble del resultado que se obtiene al sumarle cinco unidades a un número.
   h. La suma de un número par y un número impar.

3. El número que resulta de sustituir las letras por los números determinados, y realizar a continuación las operaciones que se indican se denomina:

   a. Expresión algebraica.
   b. Valor numérico.
   c. Monomio.
   d. Parte literal.

4. Expresa utilizando el lenguaje algebraico:

   a. La propiedad conmutativa de la multiplicación.
   b. El área, S, de un rectángulo de base *a* y altura *b.*
   c. En una división, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.
   d. El perímetro, P, de un rectángulo, de base *b* y altura *a*.

5. La expresión algebraica más sencilla formada por productos de números y letras, afectando a éstas la multiplicación y la potenciación de exponente entero positivo se denomina:

   a. Expresión algebraica.
   b. Valor numérico.
   c. Monomio.
   d. Parte literal.

6. Una empresa envasa sus productos en cajas pequeñas y cajas grandes. Cada caja grande pesa 10 kg más que una caja pequeña. Traduce al lenguaje algebraico:

   a. El peso de una caja pequeña.
   b. El peso de una caja grande.
   c. El peso de cinco cajas pequeñas.
   d. El peso de cinco cajas grandes.

7. La letra o letras (con los exponentes) que acompañan al coeficiente de un monomio se denomina:
   a. Expresión algebraica.
   b. Valor numérico.
   c. Monomio.
   d. Parte literal.

8. El número conocido (incluido su signo) que cuantifica la parte literal de un monomio se denomina:

   a. Coeficiente.
   b. Grado.
   c. Binomio.
   d. Polinomio.

9. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios:

   a. $a + b$
   b. $5x^3$
   c. a^2b^2
   d. $2x^3 – x$
   e. $– 2xy$
   f. $2a – 3a^2$
   g. $\frac{1}{2}(x-1)$
   h. $\frac{5a}{2b}$

10. La suma de los exponentes de las letras de la parte literal de un monomio se denomina:

    a. Coeficiente.
    b. Grado.
    c. Binomio.
    d. Polinomio.

11. Completa la siguiente tabla:

Monomio	**Coeficiente**	**Parte literal**	**Grado**
$2x^3$			
$-\frac{2}{3}x^2y^2$			
$7ax^3$			
$-9xyz^2$			

12. Una expresión algebraica compuesta por la suma o diferencia de monomios se denomina:

   a. Coeficiente.
   b. Grado.
   c. Binomio.
   d. Polinomio.

13. ¿Cuáles de los siguientes monomios son semejantes?

   a. $3x^2$
   b. $5xy$
   c. x^5
   d. $\frac{7}{3}ax^2$
   e. $\frac{4}{3}xy$
   f. $-2x^2$
   g. $5x^5$
   h. $3ax^2$

14. Reduce:

   a. $x^2 + x^2$
   b. $4a^2 - 2a^2$
   c. $5a^3 + 2a^3$
   d. $5xy - 7xy$
   e. $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$
   f. $8ab^2 - 3ab^2 - a^2$

15. Una expresión algebraica compuesta por la suma o diferencia de dos monomios se denomina:

   a. Coeficiente.
   b. Grado.
   c. Monomio.
   d. Polinomio.

16. Agrupa y reduce los monomios semejantes:

   a. $2x + 5x - 7x + 8x$
   b. $6m^2 - 9m^2 + 7m^2 - m^2$
   c. $4y - 7y^2 + 8y - 5y^2 + 6y$
   d. $5b^2 - 6b + b^2 - b + 7b - 3b^2$

17. El mayor de los grados de todos los monomios que forman un polinomio se denomina:

   a. Coeficiente.
   b. Grado.
   c. Monomio.
   d. Polinomio.

18. Simplifica las siguientes expresiones:

a. $a + x + 2a + x$
b. $3a - 2x + 3x - 2a$
c. $3x - 5 + 2x - 1$
d. $4x^2 - 5x + 3x + 2x$
e. $5x^2 - 2x^2 + 5 + 6$
f. $3x^2 + 2x - 5x^2 + 4 + 2x^2$

19. Cada uno de los monomios que forman un polinomio se denomina:

a. Término.
b. Reducir términos.
c. Expresión algebraica.
d. Valor numérico.

20. Elimina los paréntesis y simplifica:

a. $5x^2 - (2x + x^2)$
b. $x^2 - (3x - x^2)$
c. $(5x^2 - 4x) - (2x^2 + 2x)$
d. $(x^2 + x) + (3x + 1)$
e. $3x - (x - x^2)$
f. $5x - (2x - 3x^2)$
g. $(7x^2 + 3) - (5x^2 - 2)$
h. $(4x^2 - 5) - (2x^2 + 2)$

21. La suma y resta de monomios semejantes de un polinomio se denomina:

a. Término.
b. Reducir términos.
c. Expresión algebraica.
d. Valor numérico.

22. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores indicados en cada caso:

a. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ para $x = -3$

b. $\dfrac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 8a + 15}$ para $a = 4$

c. $\dfrac{y^3 - 5y}{y^3 + 6}$ para $y = -1$

23. La suma o resta de dos monomios es:

a. Otro monomio que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes de los sumandos y mantiene la misma parte literal.
b. Otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales.
c. Otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y por parte literal el cociente de las partes literales.
d. Otro monomio que tiene por coeficiente la potencia del coeficiente y por parte literal la potencia de la parte literal.

24. El producto de dos monomios es:

a. Otro monomio que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes de los sumandos y mantiene la misma parte literal.
b. Otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales.
c. Otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y por parte literal el cociente de las partes literales.
d. Otro monomio que tiene por coeficiente la potencia del coeficiente y por parte literal la potencia de la parte literal.

25. Realiza las operaciones que se indican:

a. $7x^3 \cdot (-3x^4)$

b. $\frac{-2}{3}x^4 \cdot \left(\frac{-3}{4}x^5\right)$

c. $\frac{-21x^4}{3x^3}$

d. $-8x^4 : (-4x^2)$

e. $(-x^2)^3$

f. $(-4x^4)^2$

g. $(2x^2)^3 \cdot (-x^3)^4$

26. Calcula aplicando las identidades notables:

a. $(3+5y)^2$

b. $(9z-2)^2$

c. $(m+5)\cdot(m-5)$

d. $(x+y)^2$

e. $(5y-1)^2$

f. $(x+2)\cdot(x-2)$

27. El cociente de dos monomios es:

a. Otro monomio que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes de los sumandos y mantiene la misma parte literal.
b. Otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales.
c. Otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y por parte literal el cociente de las partes literales.
d. Otro monomio que tiene por coeficiente la potencia del coeficiente y por parte literal la potencia de la parte literal.

28. Opera y reduce:

a. $(2x+3)\cdot x+(5x-1)\cdot x$

b. $5\cdot(2x^2-3x-1)-2\cdot(3x^2-5)$

29. Completa los valores o expresiones que faltan:

a. $-7x^2\cdot(\quad)=21x^5$

b. $\frac{14x^5}{(\quad)}=2x^3$

c. $\frac{(\quad)}{3x^4}=7x^3$

d. $(\quad)\cdot\frac{3}{4}x^3=-x^6$

e. $\frac{\frac{1}{3}x^3}{(\quad)}=-x^3$

f. $\frac{(\quad)}{\frac{3}{2}x^4}=-\frac{2}{5}x$

30. Copia y completa la tabla, haciendo las operaciones fuera de ella:

P (x)	Q (x)	P (x) + Q (x)	P (x) – Q (x)	– 3 · Q (x)
$x + 5$	$x + 3$			
$3x^2 + 2x + 5$	$2x^2 - 6x - 1$			
$-4m + 5m^2 + 6$	$-4 + 6m - m^2$			
$2b^3 - 3b + 5b^2 - 4$	$-2b + 5b^2 - b^3 + 3$			

31. La suma o resta de dos polinomios es:

a. Otro polinomio formado por la suma o resta de los términos semejantes, dejando indicada la suma o la resta de los términos no semejantes.
b. Otro polinomio cuyos términos son el resultado de multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y reducir términos semejantes.
c. Otro polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo cada término del polinomio entre el monomio.
d. Ninguna de las respuestas es cierta.

32. Opera y reduce términos semejantes:

a. $\left(11x^5 - 2x^4 + 2\right) \cdot \left(-4x^3\right)$

b. $\left(-3x^2 + 2x - 1\right) \cdot \left(x^2 - 4x\right)$

c. $\left(3x + 2\right) \cdot \left(3x - 2\right)$

d. $\left(7x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(7x^2 + \frac{1}{2}\right)$

e. $\left(x^3 - 2x\right) \cdot \left(x^3 - 2x\right)$

f. $\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \cdot \left(a + b\right)$

g. $\left(7x^2 + 2x^3 - 3x + 1\right) \cdot \left(-2x + 3x^2\right)$

h. $\left(7x^2 + 2xy\right) \cdot \left(y - 2x\right)$

i. $\left(2x^2 + 3y\right)^2$

j. $\left(3x - x^3\right)^2$

33. El producto de dos polinomios es:

a. Otro polinomio formado por la suma o resta de los términos semejantes, dejando indicada la suma o la resta de los términos no semejantes.
b. Otro polinomio cuyos términos son el resultado de multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y reducir términos semejantes.
c. Otro polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo cada término del polinomio entre el monomio.
d. Ninguna de las respuestas es cierta.

34. Extrae factor común en cada una de las siguientes expresiones:

a. $4x^2 + 2xy$
c. $4x^4 - 4x^3 + 4x^2$
b. $3x^3y + 3x^2y + 3xy$
d. $6a + 3b$

35. Expresa en forma de producto notable las siguientes expresiones:

a. $x^2 - 4x + 4$
c. $x^2 - 9$
b. $x^2 + 10x + 25$
d. $4x^2 - 8x + 4$

36. Reduce las siguientes expresiones:

a. $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

b. $\frac{\left(x+1\right)^2}{2} + \frac{\left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)}{4}$

37. El cociente de un polinomio entre un monomio es:

   a. Otro polinomio formado por la suma o resta de los términos semejantes, dejando indicada la suma o la resta de los términos no semejantes.
   b. Otro polinomio cuyos términos son el resultado de multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y reducir términos semejantes.
   c. Otro polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo cada término del polinomio entre el monomio.
   d. Ninguna de las respuestas es cierta.

38. El cuadrado de la suma de dos monomios es igual a:

   a. El cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   b. El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   c. El producto de una suma de dos monomios por su diferencia.
   d. Ninguna de las anteriores.

39. El cuadrado de la diferencia de dos monomios es igual a:

   a. El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   b. El cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   c. El producto de una suma de dos monomios por su diferencia.
   d. Ninguna de las anteriores.

40. La diferencia del cuadrado de dos monomios es igual a:

   a. El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   b. El cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.
   c. El producto de una suma de dos monomios por su diferencia.
   d. Ninguna de las anteriores.

Unidad 2: Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

IGUALDADES, IDENTIDADES Y ECUACIONES.

Una **igualdad numérica** son dos expresiones numéricas, separadas por el signo “ = “, que dan el mismo resultado. Por ejemplo, $3 \cdot 2 - 5 + 2 \cdot 3 = 10 - 3$

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple para cualquier valor de las letras. Por ejemplo, $(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para determinados valores de las letras, llamadas **incógnitas**. Los elementos de una ecuación son:

- Los **miembros**, que son las expresiones que figuran a la izquierda (**primer miembro**) y a la derecha (**segundo miembro**) del signo “ = “.
- Los **términos**, que son los sumandos de que consta cada miembro.
- Las **incógnitas**, que son las letras cuyo valor desconocemos.
- La(s) **solución(es)**, que es el valor(es) que debe(n) tomar la(s) incógnita(s) para que se cumpla la igualdad.

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es aquella en la que aparece una única incógnita y ésta está elevada a 1 en todos los términos en los que aparece.

$$\underbrace{2\cdot \overbrace{x}^{\text{incógnita}} + 1}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{x+3}_{\text{Segundo miembro}} \Rightarrow \underbrace{x=1}_{\text{Solución}}$$

Resolver una ecuación es hallar el valor(es) de la incógnita(s) para el que se verifica la igualdad, esto es, hallar la **solución** de la ecuación. Dos **ecuaciones equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo, x + 4 = 10 y 2x = 12 son ecuaciones equivalentes, ya que ambas tienen como solución x = 6. Veamos cómo obtener ecuaciones equivalentes a una dada:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

La ecuación 3x + 2 = 8x – 3, tiene como solución x = 1. Si sumamos + 3 a los dos miembros de la igualdad, obtenemos la ecuación 3x + 5 = 8x, que es equivalente a la anterior puesto que también tiene como solución x = 1.

- Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

La ecuación 6x – 2 = 8x – 4, tiene como solución x = 1. Si dividimos entre + 2 los dos miembros de la igualdad, obtenemos la ecuación 3x – 1 = 4x – 2, que es equivalente a la anterior puesto que también tiene como solución x = 1.

Act. 1. Determina si cada una de las siguientes igualdades es una identidad o una ecuación:

a. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
b. $(x-3)\cdot(x+3) = x^2 - 9 + 6x$
c. $(y-3)^2 + 5 = y - 4$
d. $3\cdot(a^2-1)\cdot(a-2) = 3a^3 - 6a^2 - 3a + 6$

Act. 2. Comprueba si los siguientes valores son o no solución de las ecuaciones correspondientes:

a. 5x + 9 = 44 x = 7
b. 3x + 1 = 16 x = 5
c. $\frac{6}{x} - \frac{x}{2} = 2$ x = 2
d. $(x-2)^2 = 128$ x = 10

En los apartados en que la respuesta haya sido negativa, halla por tanteo una solución de la ecuación.

Act. 3. Inventa dos ecuaciones distintas que tengan por solución y = – 1. ¿cómo son estas ecuaciones entre sí?

Vamos a ver los **pasos a seguir para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita** siguiendo un ejemplo: 2·(3x + 1) = 5 · (3x – 4) – 5	
1. Eliminar los paréntesis efectuando las operaciones indicadas.	6x + 2 = 15x – 20 – 5
2. Trasponer los términos, pasando todos los términos con incógnita a uno de los miembros y los términos independientes al otro.	6x – 15x = – 20 – 5 – 2
3. Reducir (sumar y/o restar) los términos semejantes.	– 9x = – 27
4. Despejar la incógnita. El valor que multiplica la incógnita (x), pasa al otro lado del igual (=) dividiendo.	$x = \frac{-27}{-9}$
5. Si es posible, se efectúa la división resultante (si el cociente es un número entero).	x = 3

Act. 4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. 2x = 6
b. 2m – 1 = 7
c. 2q = q – 3
d. 5 · (3x + 2) = 8 · (9 – 2x)
e. 2· (x – 1) = 4x – (x – 3)
f. 5n – 3 · (2 – n) = 1 – (n + 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Si una ecuación contiene denominadores, se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de dichos denominadores y a continuación se siguen los pasos descritos en el cuadro anterior. Vamos a verlo con un ejemplo:
$\frac{3x-2}{3}+\frac{x}{2}=\frac{7x}{6}$.</td></tr>
<tr><td>1. Hallamos el m. c. m de los denominadores.</td><td>m. c. m. (3, 2, 6) = 6</td></tr>
<tr><td>2. Multiplicamos todos los miembros de la ecuación por el m. c. m. obtenido.</td><td>$\frac{6\cdot(3x-2)}{3}+\frac{6x}{2}=\frac{6\cdot 7x}{6}$</td></tr>
<tr><td>3. Simplificamos las fracciones, dividiendo el m. c. m. por cada uno de los denominadores, y el resultado obtenido lo multiplicamos por el numerador.</td><td>$2\cdot(3x-2)+3x=7x$</td></tr>
<tr><td>4. Resolvemos la ecuación siguiendo los pasos indicados en el cuadro anterior.</td><td>6x – 4 + 3x = 7x
6x + 3x – 7x = 4
2x = 4
$x=\frac{4}{2}\Rightarrow x=2$</td></tr>
</table>

Act. 5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $5\cdot(x+2)=1+\frac{x}{2}$
b. $\frac{a}{2}+\frac{2a}{3}=2\cdot(a-5)$
c. $1-\frac{t-1}{2}=3$
d. $\frac{2u}{3}-\frac{u+1}{2}=1$
e. $\frac{3x-2}{4}+5=\frac{x+3}{2}$
f. $3\cdot(x-5)=\frac{2x}{4}+\frac{3\cdot(1-2x)}{6}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES.

La *resolución de problemas* de matemáticas comprende cuatro fases: comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y, finalmente, revisar y extender el trabajo realizado.

Cuando se conoce el *lenguaje algebraico*, una parte importante del proceso de resolución de un buen número de problemas consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje, es decir, consiste en *expresar el problema mediante ecuaciones*.

El problema que hay que resolver se transforma entonces en el problema de *resolver la ecuación*. Una vez resuelta la ecuación falta volver al problema planteado para comprobar el resultado obtenido, y revisar y extender el trabajo realizado.

Veamos cómo resolver un problema utilizando ecuaciones con el siguiente ejemplo: *Un grupo de jóvenes quiere ir a un concierto de rock. Para ello alquilan un autobús que los lleve desde el instituto. El autobús tiene capacidad para 55 personas y hay cuatro veces más plazas para ir sentado que plazas para ir de pie. ¿Cuál es el número de plazas para ir de pie?*

Para poner un problema en ecuaciones hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico. Cuando tenemos que traducir un texto del inglés al castellano, pocas veces podemos traducirlo palabra por palabra; habitualmente necesitamos comprender el significado global del texto inglés para buscar expresiones castellanas que lo traduzcan. Lo mismo sucede al traducir del castellano al lenguaje algebraico. Pero al traducir al lenguaje algebraico tenemos que tener en cuenta además que en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas. Por lo que tenemos que buscar cuáles son las cantidades de las que se habla en el enunciado del problema y qué se dice de ellas.

Así pues, lo primero que debemos hacer es: COMPRENDER EL ENUNCIADO, IDENTIFICANDO LAS CANTIDADES CONOCIDAS (O DATOS) Y LAS CANTIDADES DESCONOCIDAS (INCÓGNITAS), ASÍ COMO LAS RELACIONES ENTRE ELLAS.	En el problema se pregunta por el número de plazas que hay para ir de pie. Ésa es la incógnita del problema. Se dice además que la capacidad del autobús, es decir, el número total de plazas es 55. Esta cantidad es conocida, es un dato del problema. También se habla del número de plazas sentado. Esta cantidad es desconocida, pero no es la incógnita del problema.
Nuestro siguiente paso será DAR NOMBRE A UNA DE LAS CANTIDADES DESCONOCIDAS, ASIGNÁNDOLE UNA LETRA.	Llamamos x al número de plazas a pie.
A continuación debemos REPRESENTAR LAS CANTIDADES DESCONOCIDAS MEDIANTE EXPRESIONES ALGEBRAICAS QUE TRADUCEN LAS RELACIONES ENTRE ESAS CANTIDADES Y LA QUE HEMOS DESIGNADO CON UNA LETRA.	Número de plazas sentado → 4x (el número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas a pie) Número total de plazas → x + 4x

Ahora ESCRIBIMOS UNA ECUACIÓN A PARTIR DE LAS RELACIONES EXISTENTES ENTRE LAS DIFERENTES CANTIDADES.	$x + 4x = 55$ (el número total de plazas es 55)
Una que hemos traducido el enunciado del problema al lenguaje algebraico y hemos escrito la correspondiente ecuación, su resolución continúa con otros dos pasos: - RESOLVER LA ECUACIÓN. - COMPROBAR QUE EL RESULTADO OBTENIDO SATISFACE LA CONDICIÓN DEL PROBLEMA.	- Resolvemos la ecuación: $5x = 55$ $x = \frac{55}{5}$ $x = 11$ plazas a pie. - Comprobamos la solución obtenida: El número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas a pie, luego $4 \cdot 11 = 44$ plazas sentado. El número total de plazas es el número de plazas a pie más el número de plazas sentado, es decir, 11 (a pie) + 44 (sentado) = 55 plazas El resultado obtenido verifica, por tanto, las condiciones del problema.

Act. 6. Si un número lo multiplico por 4 me da lo mismo que si le sumo 9 unidades. ¿Cuál será ese número?

Act. 7. Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos sabiendo que la suma de todas las edades es 100 años?

Act. 8. Sabemos que el perímetro de un rectángulo es 50 m. y que la base excede a la altura en 5 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Act. 9. ¿Cuántos litros de aceite de girasol de 0,75 €/ℓ. se deben de mezclar con 15 litros de aceite de oliva de 3,75 €/ℓ. para que la mezcla salga a 3 €?

Act. 10. Una peña contrató un autobús para un viaje. Si se hubiese llenado pagarían por el viaje 8,50 € cada persona, pero quedaron 3 plazas vacías y pagaron 9 € cada uno.¿Cuántas plazas tiene el autobús?

Act. 11. Calcula un número cuya tercera parte sumada con el triple del mismo número de cómo resultado 40.

Act. 12. Una madre tiene 37 años y las edades de sus tres hijas suman 25 años. ¿Dentro de cuantos años las edades de las hijas sumaran la de la madre?

Act. 13. La edad de un hijo es la quinta parte de la edad de su padre y dentro de 7 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo. Calculo las edades de cada uno.

Act. 14. Dos jugadores se ponen a jugar con la misma cantidad de dinero; el primero pierde 400 € y el segundo gana 200 €, resultando que la cantidad que le queda la primero es la mitad de la que le queda al segundo. ¿Con cuánto dinero se pusieron a jugar?

ACTIVIDADES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

1) $4x - 1 = 7$
2) $2 - 5x = 12$
3) $4 - 3x = 4$
4) $11 = 5 + 4x$
5) $21 - 7x = 0$
6) $13x - 5 - 6x = 9$
7) $6 - x = 3 - 4x$
8) $2x - 5 + x = 1 + 3x - 6$
9) $1 - 8x + 5 = 11 - 3x$
10) $7x + 2x = 2x + 1 + 6x$
11) $4 - (2x - 1) = 3 \cdot (2 - x) - 10$
12) $7 \cdot (x - 18) = 3 \cdot (x - 14)$
13) $5 - 2 \cdot (2x - 3) = 4 \cdot (x - 1)$
14) $3 \cdot (x - 6) = 2 \cdot (x - 4)$
15) $x + 2 \cdot (3x - 1) = 3 \cdot (x - 2)$
16) $12 - (x - 4) = 6 + x$
17) $3 - (1 - 6x) = 2 + 4x$
18) $3 \cdot (x - 1) - 4x = 5 - (x + 7)$
19) $2x - 2 \cdot (x - 1) + 5 = 4 - 3 \cdot (x + 1)$
20) $5 \cdot (2x - 3) - 8x = 14x - 3 \cdot (4x + 5)$
21) $3 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (2x - 1) - 2 \cdot (3x + 4) + 10 = 0$
22) $5x - 2 \cdot (3x - 4) = 25 - 3 \cdot (5x + 1)$
23) $5 - \frac{x}{2} = 3x - 16$
24) $x - \frac{x}{3} = 2x - \frac{2}{3}$
25) $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{4}{3}$
26) $\frac{x}{5} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$
27) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$
28) $1 - \frac{x-2}{3} = x$
29) $\frac{x}{3} - \frac{x+2}{9} = \frac{x}{3}$
30) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{2x}{15} + 7$
31) $x - \frac{x-5}{2} = 4$
32) $\frac{x-7}{4} + \frac{x-1}{3} = x - 5$
33) $3 - \frac{2x}{5} = x - \frac{3x-1}{2}$
34) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$
35) $\frac{x-1}{5} - \frac{1-x}{6} = \frac{x-1}{4}$
36) $\frac{3x-2}{5} - \frac{2x-1}{3} = \frac{5x-7}{15}$
37) $x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2}$
38) $\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{5} - 1$
39) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$
40) $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$
41) $2x - \frac{x+1}{8} = 3 - \frac{3x-1}{4}$
42) $5x - 3 \cdot \left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{7x}{2} - 3$

43) $\frac{2x}{3}-5\cdot\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{4}\right)=3-2\cdot\left(1-\frac{x}{6}\right)$

44) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)$

2. Calcular tres números consecutivos cuya suma sea 132.

3. Las edades de dos hermanos suman 49 años. Calcularlas sabiendo que la edad de uno es superior en 5 años a la del otro.

4. Trece lápices y siete bolígrafos de marca se han vendido por 108 €. Calcular el precio de cada uno, sabiendo que el valor de un bolígrafo es doble del de un lápiz.

5. Juan tiene 18 años más que José y hace tres años tenía el doble. Calcular sus edades.

6. Hallar dos números que se diferencien en 32, sabiendo que la mitad de la suma más los $\frac{2}{3}$ del menor, da 56.

7. Repartir 4040 € entre cuatro personas, sabiendo que la segundo recibe la mitad de la primera, la tercera un tercio de la segunda, y la cuarta la décima parte de la tercera.

8. Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 19,50 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y éste cuesta el doble que el helado. ¿Cuánto pagó Andrés por cada artículo?

9. Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que, entre los dos hijos, igualen la edad del padre?

10. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en la reunión hay un total de 96 personas, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión?

11. De un bidón de aceite se han consumido $\frac{7}{8}$. Si echamos 38 litros, el bidón queda lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. ¿Cuál es la capacidad del bidón?

12. Un delineante necesita saber el valor de los ángulos de un triángulo rectángulo en el que un ángulo agudo mide 30º más que el otro. ¿Cómo puede calcularlos?

13. Una empresa de informática reparte unos beneficios de 8200 € entre 14 empleadas de las cuales 10 son fijas y 4 contratadas. Si las fijas cobran 55 euros más que las contratadas, ¿cuánto recibe cada una?

14. En un taller de metal se fabrica una pieza rectangular cuya base es el triple de la altura. Si su perímetro es 40 cm., ¿cuál es su área?

15. Un albañil cobra un trabajo de la siguiente forma: la sexta parte al iniciarlo, la cuarta parte al cabo de un mes, la quinta parte al finalizar el segundo mes y la tercera parte más 75 € al finalizar la obra. ¿Cuánto cobra por el trabajo?

16. En el mes de agosto cierto embalse estaba a los $\frac{3}{5}$ de su capacidad. En septiembre no llovió y se gastó $\frac{1}{5}$ de su capacidad total. En octubre se recuperaron 700000 m^3, quedando lleno en sus tres cuartas partes. ¿Cuál es su capacidad?

17. Tres amigos juegan un décimo de lotería, que resulta premiado con 600000 €. Calcular cuánto corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega doble que el segundo y éste triple que el tercero.

18. Con 20 billetes de 20 y 10 € se ha pagado una factura de 320 €. Calcular el número de billetes de cada clase que se han entregado.

19. El sueldo de Arturo es el triple que el de su hijo Enrique. El mes que viene Enrique subirá de categoría y recibirá 800 € más, con lo que ganará la mitad que su padre. ¿Cuánto gana actualmente cada uno?

20. En un triángulo isósceles, cada uno de los dos lados iguales es 5 cm más largo que el lado desigual. Si el perímetro mide 55 cm, ¿cuánto mide cada lado?

21. Una finca rectangular mide 150 m de largo. Si fuera 30 m más larga y 20 metros más ancha, su superficie sería 6000 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

22. Mezclando vino de 20 €/ℓ con vino de 35 €/ℓ, se han obtenido 500 litros de vino, de calidad intermedia, que sale a 29 €/ℓ. ¿Cuántos litros de cada clase se han mezclado?

23. Se han comprado 50 botellas de vino por un total de 280 €. Cada botella de vino blanco se pagó a 5 € y cada una de tinto a 7 €. ¿Cuántas botellas de cada clase se compraron ?

24. ¿Cuántos litros de aceite de girasol a 1,50 €/ℓ se deben mezclar con 14 litros de aceite de oliva a 7,50 €/ℓ para que la mezcla salga a 6 €/ℓ?

25. En mi bolsillo llevo 15 billetes de 10 y 5 €. El valor total de lo que llevo es de 120 €. ¿Cuántos llevo de cada clase?

26. Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 €. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado 1 €. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo?

27. En un juego de televisión se cobran 32 € por cada acierto, pero se ha de pagar la mitad de ese dinero por cada fallo. ¿Cuántos aciertos tuvieron dos concursantes si al cabo de 60 preguntas no recibieron nada?

28. Se importan del extranjero un cierto número de toneladas de una mercancía que ha de venderse a 800 € la tonelada. Por avería en el transporte se inutilizan 150 toneladas y con objeto de que la ganancia en la venta sea la misma se vende cada tonelada del resto a 1.000 €. Hallar las toneladas que se importaron.

29. Juan, el padre de Ana, tiene ahora 3 veces la edad de su hija, pero hace 5 años la edad de Juan era 4 veces la de Ana. ¿Qué edades tienen Ana y Juan?

30. Las raíces de un árbol, que se encuentran bajo tierra, representan $\frac{1}{5}$ de su longitud. ¿Cuál es la longitud total del árbol, sabiendo que la parte que se ve mide 5 metros?

31. Un hotel tiene 65 habitaciones entre dobles e individuales; hallar cuántas hay de cada tipo sabiendo que el número total de camas es de 105.

32. Una familia está compuesta por los padres y tres hijos. Las edades de los cinco suman 142 años. Averigua la edad de cada uno sabiendo que el segundo hijo tiene 2 años más que el tercero y tres menos que el primero; que la edad de la madre es la suma de la de los tres hijos y que el padre tenía 4 años cuando nació su esposa.

33. El dueño de un restaurante mezcla una bolsa de café de 10 €/Kg con cierta cantidad de café inferior de 8 €/Kg. Así obtiene 10 Kg de mezcla que sale a 9,50 €/Kg. ¿Qué cantidad de cada clase empleó?

34. Ángel repartió fotos en 3 álbumes. En el primer álbum puso la cuarta parte más 8 fotos. En el segundo puso la mitad menos 2 fotos, y en el tercero puso la quinta parte. ¿Cuántas fotos tenía Ángel?

35. Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habría en el jurado?

36. Dos jugadores se ponen a jugar con una misma cantidad de dinero. El primero pierde 2,40 € y el segundo 1,20 €, resultando que la cantidad que le queda al primero es la mitad de la que le queda al segundo. ¿Con cuánto dinero se pusieron a jugar?

37. Un poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud, $\frac{2}{5}$ del resto sumergido en agua, y la parte emergida mide 6 m. Halla la longitud del poste.

38. La comparsa que obtuvo el primer premio en el carnaval de Cádiz estaba formado por 45 personas de las cuales la quinta parte iba disfrazada de Cristóbal Colón y el resto de indios y de indias. Si el número de indios es el doble que el de indias, averigua cómo se hizo el reparto de disfraces.

39. Juan, el padre de Ana, tiene ahora 3 veces la edad de su hija, pero hace 5 años la edad de Juan era 4 veces la de Ana. ¿Qué edades tienen Ana y Juan?

40. Un labrador tiene 450 euros en dinero y además recibe el importe de 7 sacos de avena. Luego invierte los $\frac{3}{4}$ del dinero que tiene en pagar una deuda; por fin vende otros cinco sacos de avena al mismo precio que antes, hallándose entonces con 477 euros. ¿A qué precio vendió cada saco de avena?

41. Se cuenta que la legendaria fundadora de Praga, la reina Libussa de Bohemia, eligió a su consorte entre tres pretendientes, planteándoles el siguiente problema: ¿cuántas ciruelas contenía un canasto del cual sacó la mitad del contenido y una ciruela más para el primer pretendiente; para el segundo la mitad de lo que quedó y una ciruela más y para el tercero la mitad de lo que entonces quedaba y tres ciruelas más, si con esto el canasto se vació? ¿Puedes calcularlo tú?

Unidad 3: Poliedros. Cuerpos de revolución.

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.

Los **elementos de un poliedro** son:

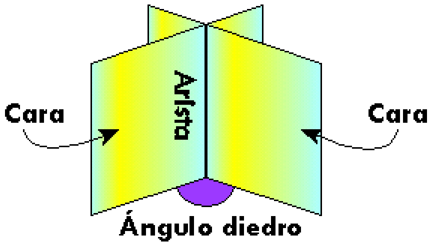
CARAS: son los polígonos que limitan el poliedro.

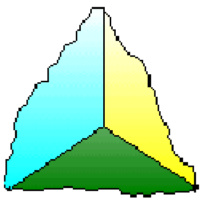
- La cara en la que se apoya el poliedro y su opuesta se llaman **bases.**
- Las caras que tienen un lado en común con la base o las bases se conocen como **caras laterales**.

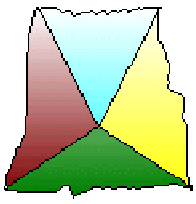
ARISTAS: son las rectas comunes a dos caras.

VÉRTICES: son los puntos comunes a dos o más aristas.

ÁNGULO DIEDRO: es el ángulo formado por dos caras.

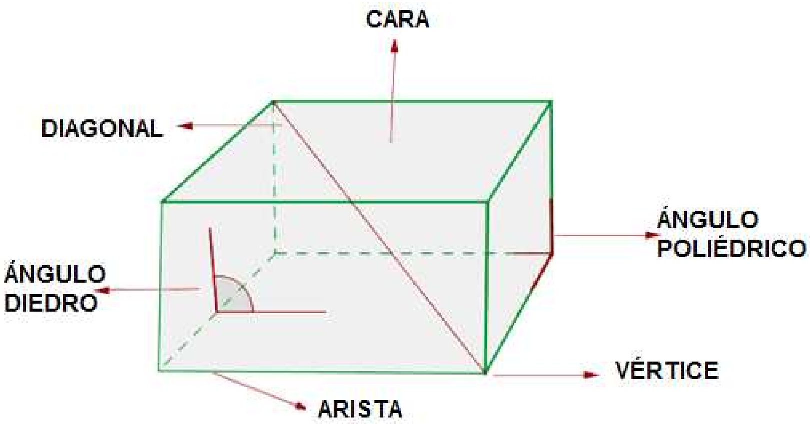


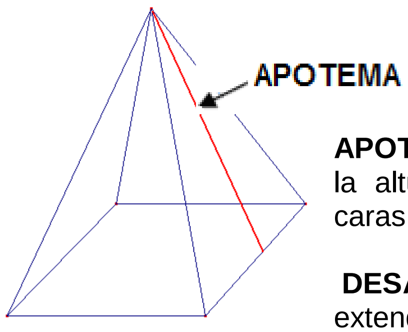




ÁNGULO POLIEDRO: es el ángulo formado por tres o más caras, con un punto en común, el vértice. Según el número de caras que formen el ángulo poliedro, estos reciben un nombre diferente. Así, si son tres planos se le llama **triedro**, si cuatro, **tetraedro**, si cinco, **pentaedro**…

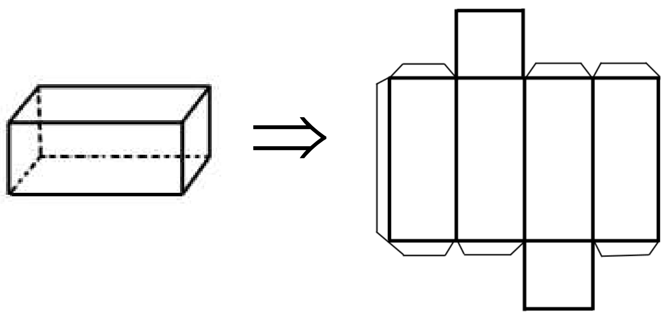
DIAGONAL: es el segmento que une dos vértices no consecutivos del poliedro. Puede trazarse en una misma cara o entre distintas caras.





APOTEMA: es la altura de las caras laterales.

DESARROLLO DEL POLIEDRO: es la superficie que resulta al extenderlo sobre el plano.



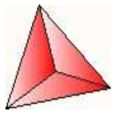
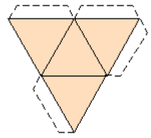
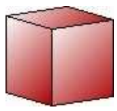
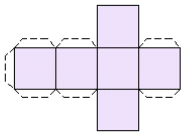
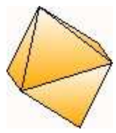
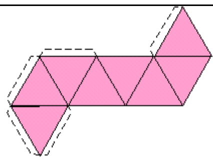
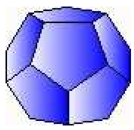
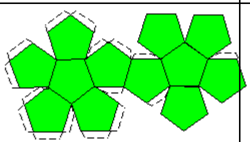
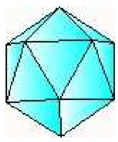
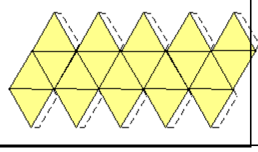
POLIEDROS REGULARES

Los **poliedros regulares** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares, iguales en forma y tamaño. Un poliedro regular cumple:

- En cada vértice concurren el mismo número de caras.
- Todos los ángulos son iguales.
- **Relación de Euler**: Número de caras + Número de vértices = Número de aristas + 2

$$C + V = A + 2$$

Sólo hay cinco poliedros regulares, conocidos también con el nombre de **sólidos platónicos.** Son el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Poliedro	Nº de caras	Polígono que forman sus caras	Figura	Desarrollo
Tetraedro	4	Triángulos equiláteros		
Cubo o hexaedro	6	Cuadrados		
Octaedro	8	Triángulos equiláteros		
Dodecaedro	12	Pentágonos regulares		
Icosaedro	20	Triángulos equiláteros		

Act. 1. ¿Cuál de los siguientes cuerpos no es un poliedro?

a. Pirámide b. Cubo. c. Cono. d. Prisma.

Act. 2. ¿Cuál es el número mínimo de polígonos para formar un poliedro?

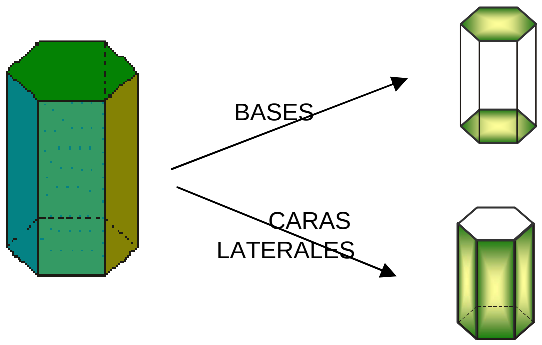
Act. 3. Un poliedro tiene 8 caras y 6 vértices, ¿cuántas aristas tiene?

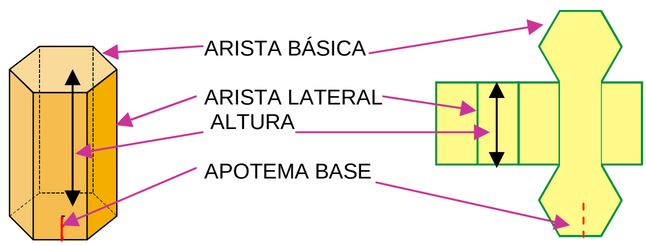
Act. 4. Una pirámide tiene nueve vértices, ¿qué polígono forma su base?

Act. 5. Una pirámide tiene 12 aristas, ¿qué polígono forma su base?

1. PRISMAS.

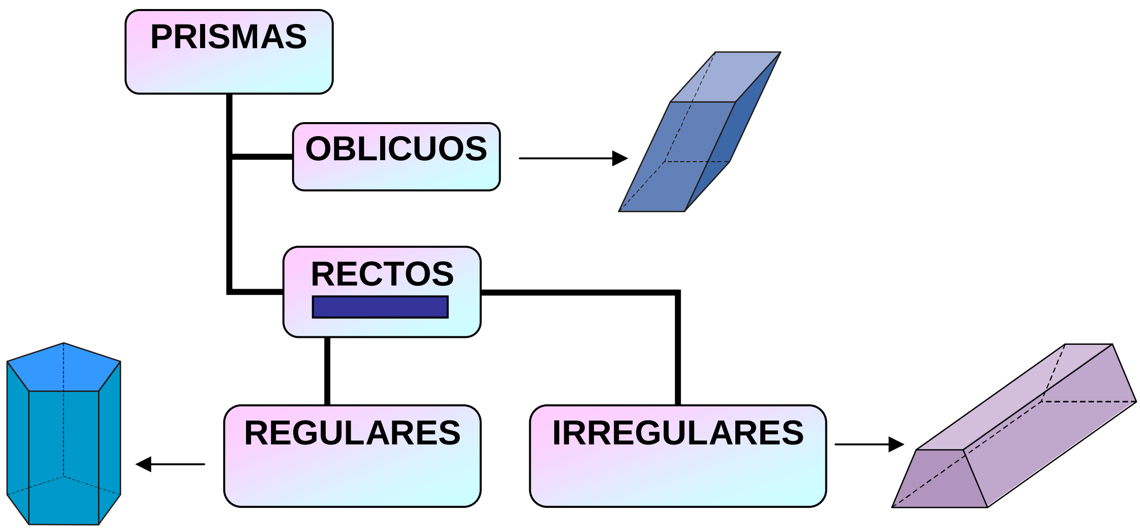
Los **prismas** son poliedros que tienen por base dos polígonos iguales y por caras laterales, paralelogramos.



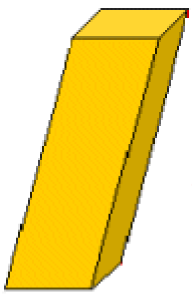


La altura es la distancia entre las dos bases.

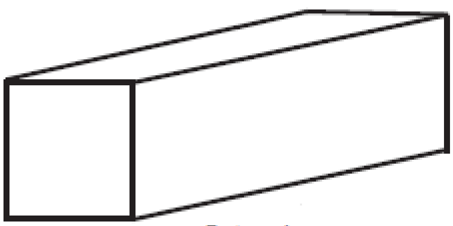
Los prismas se diferencian y se nombran según el polígono de la base: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales…Además pueden ser **rectos** (las caras laterales son perpendiculares a las bases. Son rectángulos) u **oblicuos** (las caras laterales no son perpendiculares a las bases). Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se llaman **prismas regulares.** En caso contrario, diremos que se trata de un **prisma irregular.**



Los **paralelepípedos** son prismas cuyas caras son todas paralelogramos. Si son rectos, se llaman **ortoedros.**



Paralelepípedo



Ortoedro

A partir del desarrollo de un prisma recto podemos calcular su área.

Área lateral, A_L. Es la suma de las áreas de todas sus caras laterales. Como el desarrollo son rectángulos, el área es:

$$\boxed{A_L = P_B \cdot h} \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_B \equiv \text{Perímetro de la base} \\ h \equiv \text{Altura} \end{cases}$$

Área básica, A_B. Es la suma de las áreas de las dos bases. Como las bases son polígonos regulares, cada una tendrá un área igual a:

$$\boxed{A = \frac{P_B \cdot a}{2}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_B \equiv \text{Perímetro de la base} \\ a \equiv \text{Apotema de la base} \end{cases}$$

Área total, A_T. Es la suma de las áreas lateral y básica.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcula el área total de un prisma pentagonal si su altura es de 7 dm, cada lado de la base mide 3 dm y la apotema del polígono de las bases mide 2 dm.

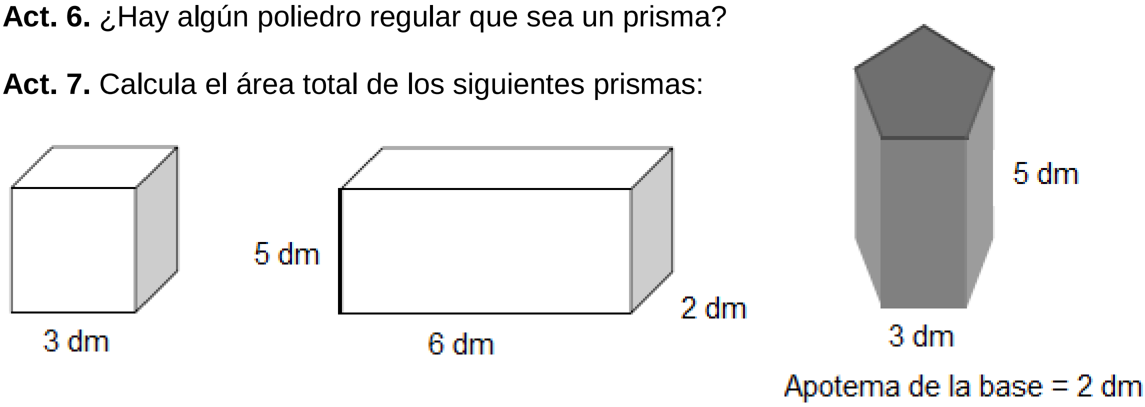
$A_L = P_B \cdot h = (3 \text{ dm} \cdot 5 \text{ caras}) \cdot 7 \text{ dm} = 15 \cdot 7 = 105 \text{ dm}^2$

$$A = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(3 \text{ dm} \cdot 5 \text{ caras}) \cdot 2 \text{ dm}}{2} = \frac{30 \text{ dm}^2}{2} = 15 \text{ dm}^2$$

$A_T = A_L + A_B = 105 + 2 \cdot 15 = 105 + 30 =$ <u>135 dm^2</u>

Act. 6. ¿Hay algún poliedro regular que sea un prisma?

Act. 7. Calcula el área total de los siguientes prismas:



Act. 8. Calcula el área total de los prismas regulares siguientes:

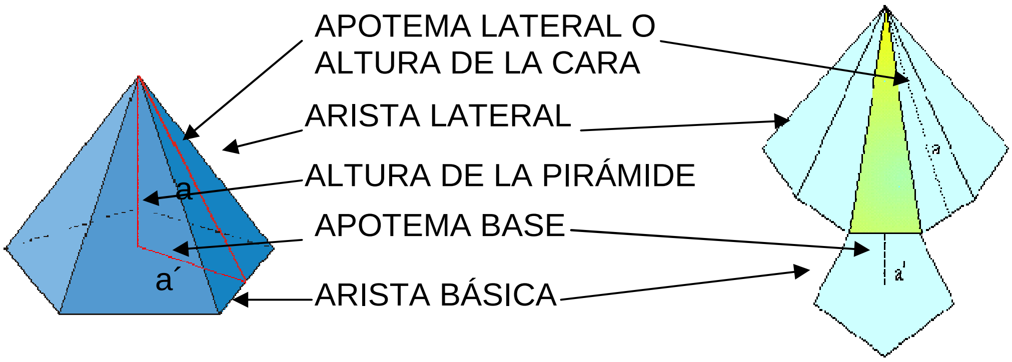
a. <u>Base</u>: octógono de 6 dm de lado y 9,24 dm de apotema. <u>Altura</u>: 25 dm.
b. <u>Base</u>: cuadrado de 7 cm. de altura. <u>Altura</u>: 18 cm.

Act. 9. Calcula el área de un prisma triangular sabiendo que sus bases son dos triángulos rectángulos de catetos 6 cm. y 4 cm respectivamente y que la altura del prisma mide 10 cm.

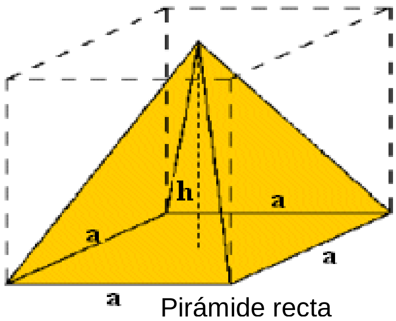
Act. 10. Una caja de galletas tiene forma de prisma hexagonal. Calcula su área total sabiendo que el lado del hexágono regular mide 4 cm y que la altura del prisma mide 10 cm.

2. PIRÁMIDES.

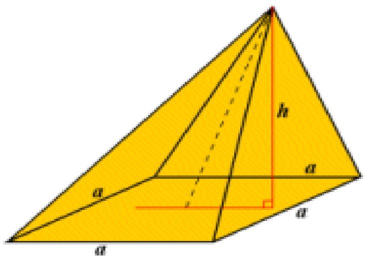
Las **pirámides** son poliedros que tienen por base un polígono cualquiera, y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, el **vértice o cúspide de la pirámide**.



Las pirámides se diferencian y se nombran según el polígono de la base: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales… Además pueden ser **rectas** (la base y el vértice están sobre la misma vertical. En este caso las caras laterales son triángulos isósceles o equiláteros) u **oblicuas** (la base está desplazada lateralmente respecto al vértice, no coinciden sobre la misma vertical. En este caso las caras laterales son triángulos de muy diversa forma, no son todos iguales).

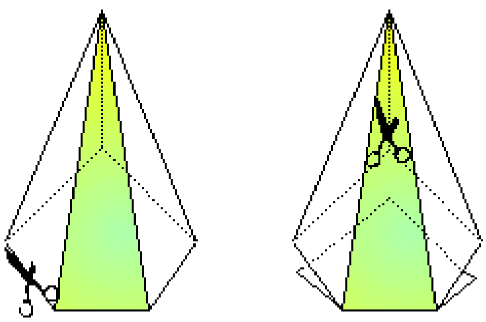


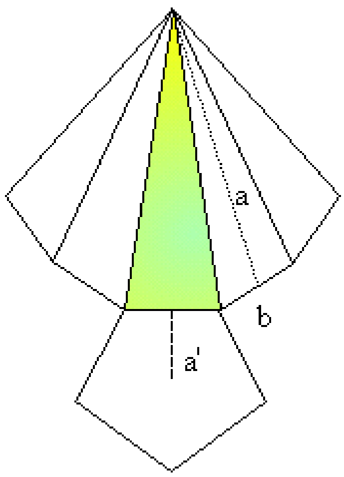
Pirámide recta



Pirámide oblicua

El desarrollo de una pirámide recta está formado por el polígono de la base y tantos triángulos iguales como lados tenga dicha base.
A partir del desarrollo de una pirámide recta podemos calcular su área.





Pirámide pentagonal

Área lateral, A_L. Es la suma de las áreas de todas sus caras laterales. Como el desarrollo son triángulos, el área es:

$$\boxed{A_L = n \cdot \frac{b \cdot a_p}{2}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} n \equiv \text{número de triángulos} \\ b \equiv \text{arista básica} \\ a_p \equiv \text{ apotema de la pirámide (altura de los triángulos)} \end{cases}$$

Área básica, A_B. Es el área del polígono regular que forma la base.

$$\boxed{A_B = \frac{P_B \cdot a}{2}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_B \equiv \text{Perímetro de la base} \\ a \equiv \text{Apotema de la base} \end{cases}$$

Área total, A_T. Es la suma de las áreas lateral y básica.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcula el área total de una pirámide pentagonal, si la apotema de la base mide 5 cm, su arista básica 6 cm y la altura de cada uno de los triángulos de las caras mide 9 cm.

$$A_L = n \cdot \frac{b \cdot a_p}{2} = 5 \text{ lados } \cdot \frac{6\ cm \cdot\ 9 \text{ cm}}{2} = 5 \cdot \frac{54 \text{ cm}^2}{2} = 5 \cdot 27 = 135 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(5 \text{ lados } \cdot\ 6 \text{ cm}) \cdot\ 5 \text{ cm}}{2} = \frac{30 \text{ cm} \cdot\ 5 \text{ cm}}{2} = 75 \text{ cm}^2$$

$A_T = A_L + A_B = 135 + 75 =$ <u>210 cm^2</u>

Act. 11. Calcula el área de una pirámide de base cuadrangular, si su arista básica mide 7 cm y su apotema 4 cm.

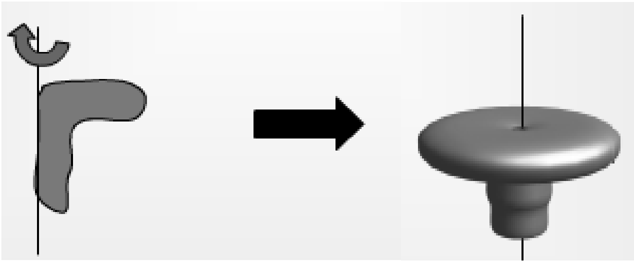
Act. 12. Calcula el área total de una pirámide que tiene una base de área 100 cm² y una altura de 20 cm.

Act. 13. Calcula el área lateral de una pirámide triangular sabiendo que el lado del triángulo mide 12 cm y la apotema de la pirámide 30 cm.

Act. 14. La torre de una iglesia mide 120 m. de alto. Tiene forma de prisma cuadrangular (en sus primeros 100 metros) y termina en forma de pirámide regular (los últimos 20 metros). Su base es cuadrada, de 6 m. de lado. Si quisiéramos pintarla, ¿qué superficie tendríamos que pintar?

3. CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

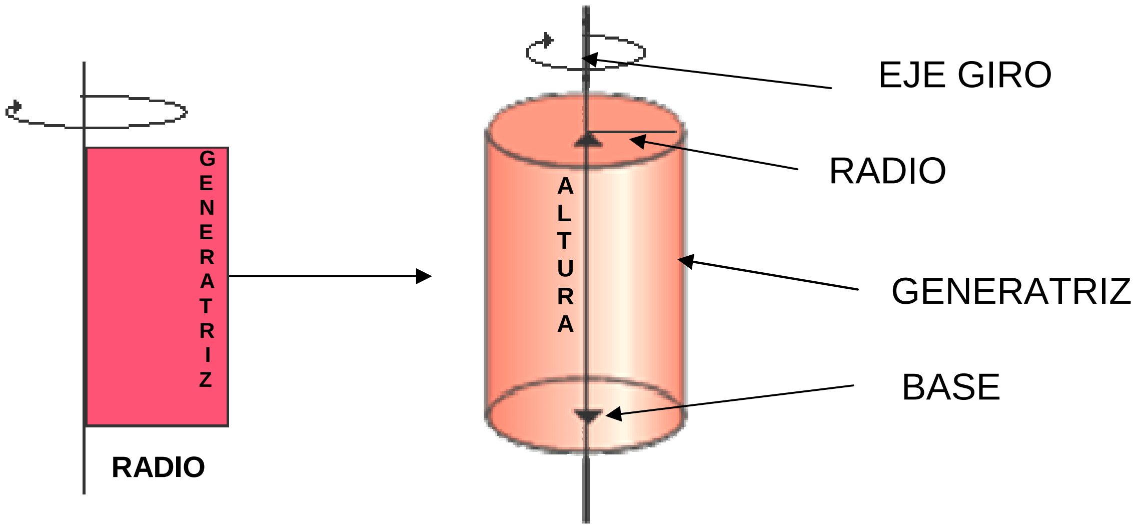
Llamamos **cuerpos de revolución** a aquellos que se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje. Podemos obtener cuerpos de revolución de lo más variado, basta con hacer girar cualquier figura plana alrededor de un eje. Por ejemplo, si giramos la siguiente figura plana por el eje indicado, obtenemos el siguiente cuerpo:



Los cuerpos de revolución más usuales son el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**, que estudiaremos a continuación.

3.1. CILINDRO.

El **cilindro** es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar una vuelta completa, 360º, un rectángulo sobre uno de sus lados.

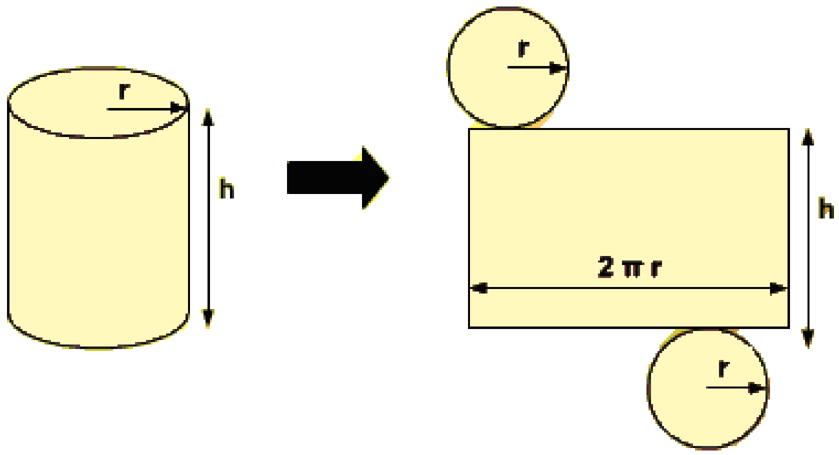


En el cilindro:

- Las **bases** son dos círculos iguales y paralelos.
- El **radio del cilindro** es el radio de las bases.
- La **generatriz** es el lado del rectángulo opuesto al eje que genera la superficie cilíndrica.
- El **eje** es el lado fijo del rectángulo que, al girar sobre sí mismo, engendra el cilindro.
- La **altura** es la longitud de la generatriz (distancia entre las dos bases).

Al desarrollar un cilindro se obtiene un rectángulo y dos círculos iguales que constituyen las bases:

- La base del rectángulo es la longitud de la circunferencia de la base.
- La altura del rectángulo es la generatriz del cilindro.



A partir del desarrollo de un cilindro recto podemos calcular su área.

Área lateral, A_L. Es el área de un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base, $2 \cdot \pi \cdot r$, y la altura, h, es la altura del cilindro o generatriz, g:

$$\boxed{A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

Área básica, A_B. Es la suma de las áreas de las dos bases. Como las bases son círculos, el área de cada una de ellas será $\pi \cdot r^2$, por lo que:

$$\boxed{A_B = 2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Área total, A_T. Es la suma de las áreas lateral y básica.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

Ejemplo: Calcula el área total de un cilindro, de 5 m de altura y 3 m de radio de la base.

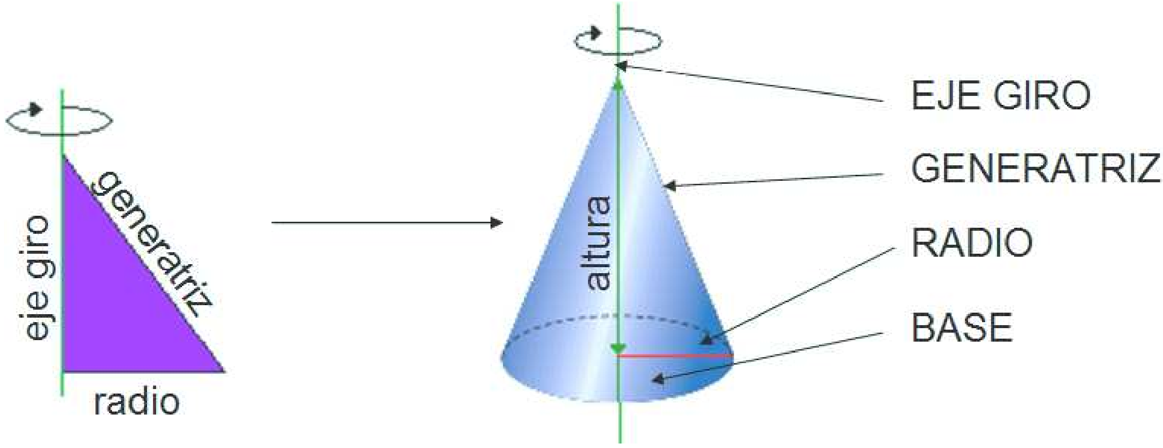
$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ m^2$

$A_B = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 = 6{,}28 \cdot 9 = 56{,}52\ m^2$

$A_T = A_L + A_B = 94{,}2 + 56{,}52 =$ $150{,}72\ m^2$

3.2. CONO.

El **cono** es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

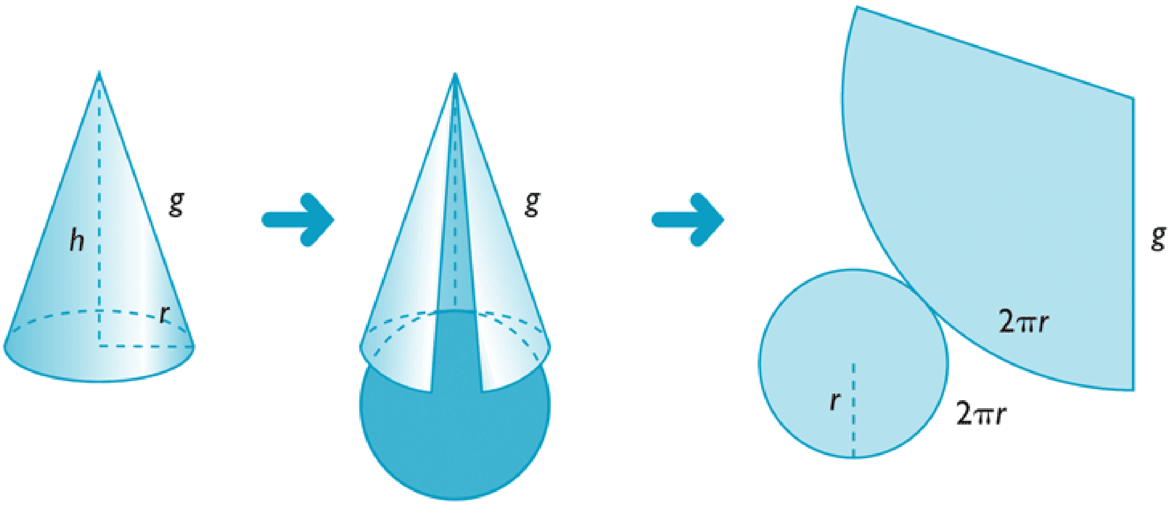


En el cono:

- La **base** es el círculo en el que se apoya el cono.
- El **radio del cono** es el radio de la base.
- La **generatriz** es el segmento que une el vértice con un punto cualquiera de la circunferencia (coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo que genera el cono)
- El **eje** es el cateto del triángulo que, al girar sobre sí mismo, engendra el cono.
- La **altura** es la distancia desde el vértice de la base.

El desarrollo del cono está formado por un sector circular y un círculo:

- La longitud del arco del sector es $2 \cdot \pi \cdot r$, siendo r el radio del cono, ya que es la longitud de la circunferencia de la base.
- El radio del sector circular es la generatriz del cono.



h es la altura del cono, g es la generatriz del cono y r el radio de la base.

A partir del desarrollo de un cono recto podemos calcular su área.

Área lateral, A_L. Es el área de un sector circular, siendo la longitud del arco la longitud de la circunferencia de la base:

$$\boxed{A_L = A_{sector\ circular} = \frac{L_{arco} \cdot \text{radio del sector}}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot g}{2} = \pi \cdot r \cdot g}$$

Área básica, A_B. Es el área del círculo de la base:

$$\boxed{A_B = \pi \cdot r^2}$$

Área total, A_T. Es la suma de las áreas lateral y básica.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

<u>Ejemplo</u>: ¿Cuál es el área total de un cono si el radio de su base mide 3 cm y su generatriz es el cuádruple del radio?

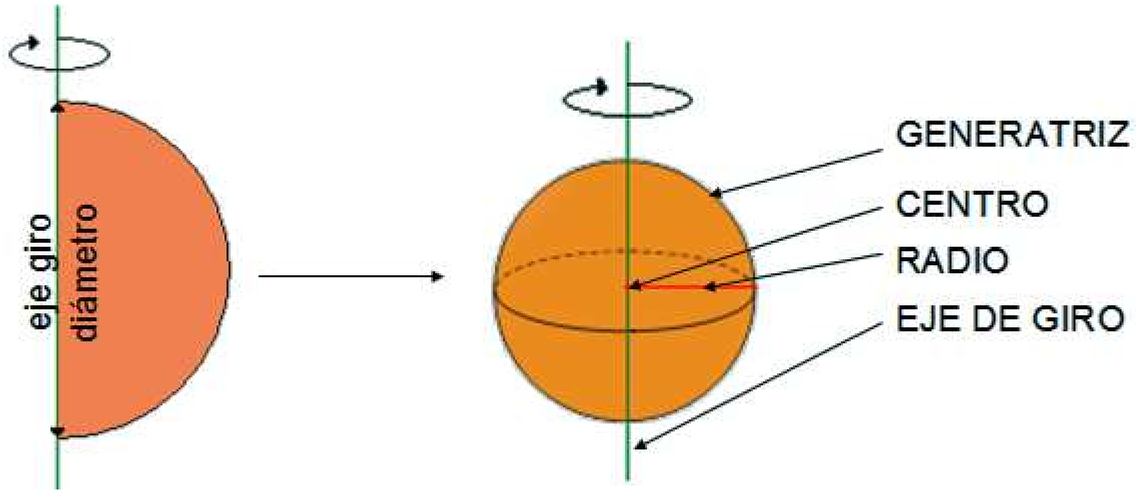
$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12 = 113\ cm^2$

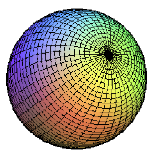
$A_B = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 28{,}26\ cm^2$

$A_T = A_L + A_B = 113 + 28{,}26 =$ <u>141,26 cm^2</u>

3.3. ESFERA.

La **esfera** es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un semicírculo sobre su diámetro. Sus elementos notables son el **radio** y el **centro**.





La esfera es un cuerpo redondo que no tiene caras, está formado por una única superficie curva. Tampoco tiene desarrollo, como el cilindro o el cono. La superficie de la esfera se denomina **superficie esférica**, podemos calcularla mediante la fórmula:

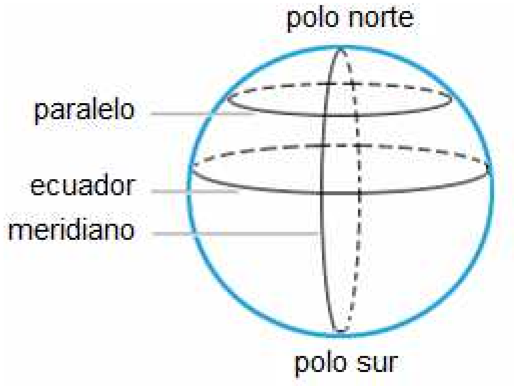
$$\boxed{A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Ejemplo: Calcula la superficie esférica de una pelota de 10 cm de radio. Expresa el resultado en m^2.

$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 1256\ cm^2 =$ 0, 1256 m^2.

LA ESFERA TERRESTRE. Como la Tierra tiene forma casi esférica (está un poco achatada por los polos), la llamamos la **esfera terrestre**. Sobre ella trazamos unas líneas imaginarias, que nos permitirán precisar la posición de cualquier punto sobre ella, por ejemplo, la situación de tu pueblo o ciudad. Esas líneas son: el eje terrestre, el ecuador, los paralelos y los meridianos.

- El **eje de rotación** o **eje terrestre**, en cuyos extremos se sitúan el polo norte y el polo sur.
- El **ecuador**, que es la circunferencia máxima perpendicular al eje terrestre.
- Los **paralelos**, circunferencias paralelas al ecuador, menores que él.
- Los **meridianos**, semicircunferencias que unen los polos. Se llama **meridiano cero** al que pasa por Greenwich, que es una ciudad inglesa muy cerca de Londres



Act. 15. Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 2 dm de altura.

Act. 16. Para la fiesta de cumpleaños de Ana se han hecho 10 gorros de forma cónica, para sus amigos en papel plateado. ¿Cuánto papel se habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 17 cm de altura.

Act. 17. Un bote cilíndrico de conserva tiene un diámetro de 10 cm y una altura de 30 cm. Calcula la cantidad de aluminio necesario para fabricarlo.

Act. 18. Un torreón de forma cónica se desea cubrir con lona. Si tiene una altura de 15 m y un diámetro de 8 m, ¿qué cantidad de lona se necesita para cubrirlo?

Act. 19. Calcula la superficie esférica de un balón que tiene 30 cm de diámetro.

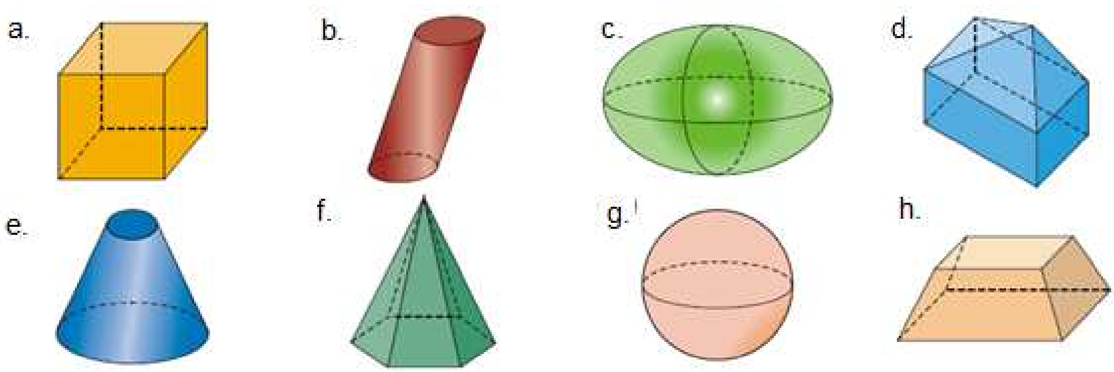
Act. 20. Una cúpula semiesférica de un edificio tiene 10 m de diámetro y una altura de 5 m. Calcula su superficie.

Act. 21. Una de las torres cilíndricas del Castillo de Olite (Navarra) tiene 5 m de diámetro, 3 m de altura y está rematado con un cono de 5 m de altura. Calcula cuánto puede costar cubrir toda la torre con una sustancia incolora que la proteja de las agresiones de la contaminación, si cada litro de esa sustancia cuesta 15 € y con un litro pintamos 3 m^2.

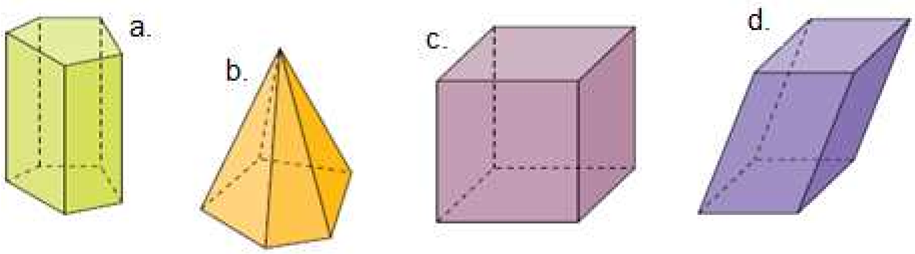
Act. 22. Suponemos que una naranja tiene forma esférica perfecta. Sabemos que tiene 12 cm De diámetro y está compuesta por 14 gajos. ¿Qué superficie de cáscara le corresponde a cada uno de sus gajos?

ACTIVIDADES

1. De los siguientes cuerpos geométricos, di cuáles son poliedros y cuáles no. Razona tu respuesta.

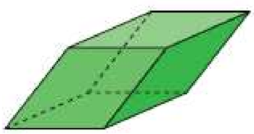


2. Indica qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes. ¿Hay entre ellos algún poliedro regular?



3. ¿Una pirámide pentagonal regular es un poliedro regular? Explica por qué.

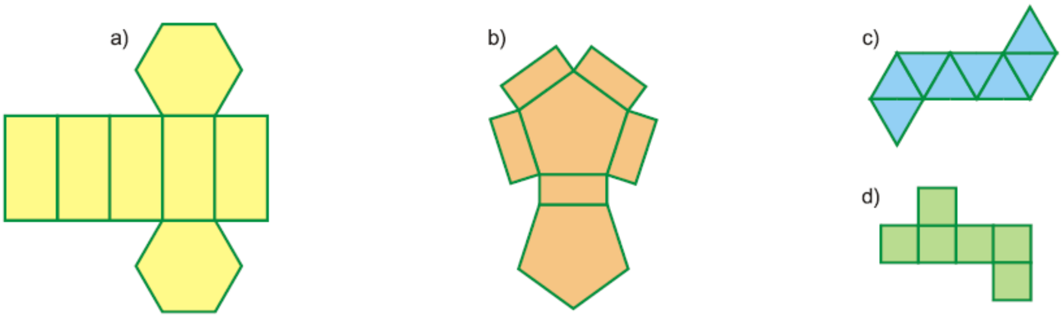
4. Esta figura está formada por seis rombos idénticos. Aunque sus caras son iguales y concurren tres de ellas en cada vértice, no es un poliedro regular. Explica por qué.



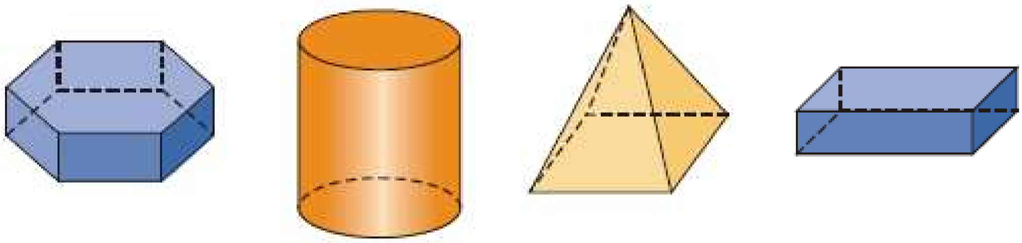
5. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué:

   a. Un cilindro es un poliedro.
   b. En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras.
   c. Una pirámide de base pentagonal es un poliedro.
   d. Un poliedro tiene al menos diez aristas.
   e. Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular.

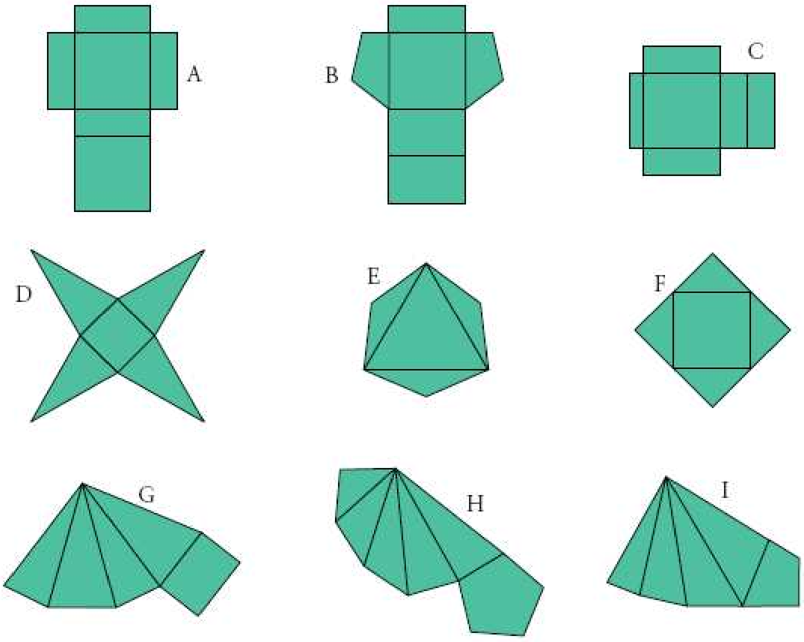
6. De los siguientes desarrollos planos, indica cuáles corresponderían a prismas y cuáles no. En los que no, explica por qué:



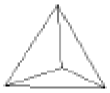
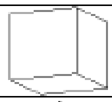
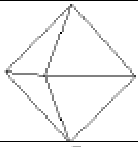
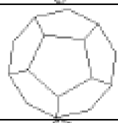
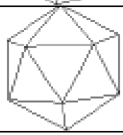
7. Dibuja el desarrollo plano de cada una de estas figuras:



8. ¿Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede completar un poliedro? Contesta razonadamente.

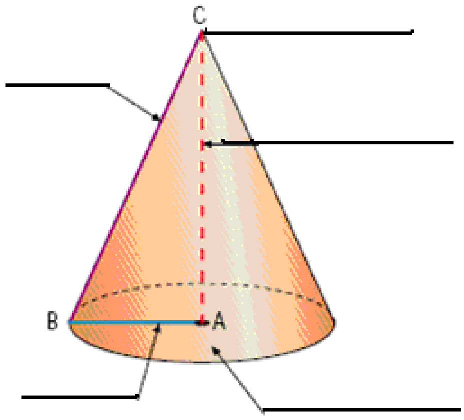


9. Completa la siguiente tabla:

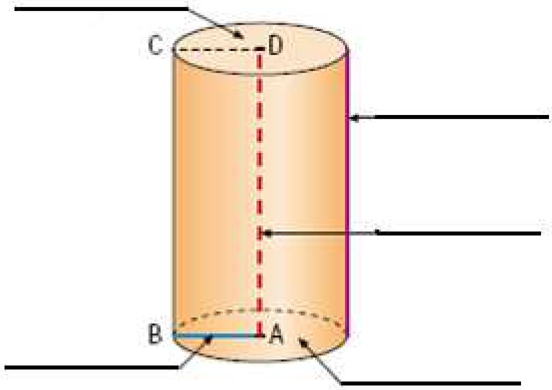
Nombre		Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

10. Nombra los elementos que se indican en los siguientes cuerpos de revolución:

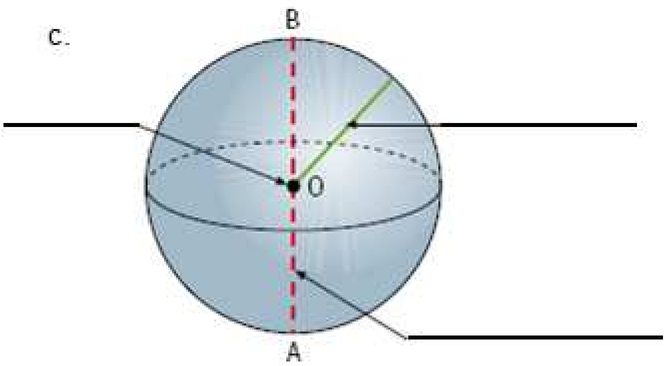
a.



b.

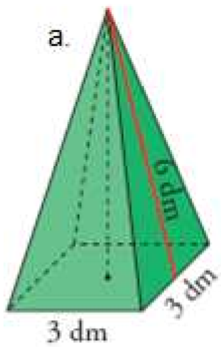


c.

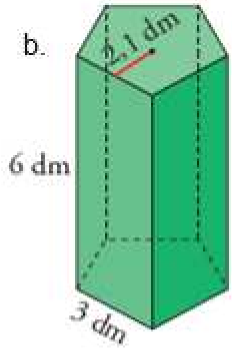


11. Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

a.

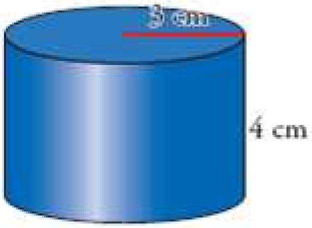


b.

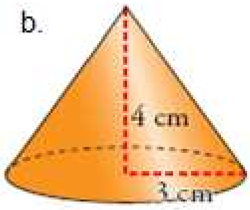


12. Halla la superficie lateral y la superficie total de los siguientes cuerpos geométricos:

a.

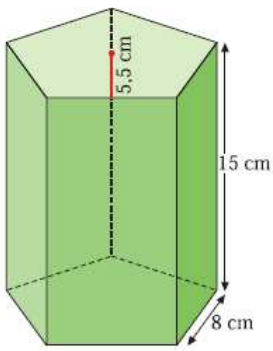


b.

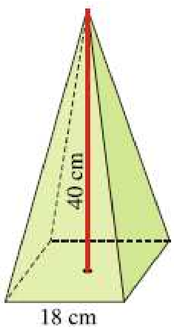


c.

13. Las bases de un prisma recto son pentágonos regulares de 8 cm de lado y 5,5 cm de apotema. La altura del prisma es de 15 cm. Dibuja su desarrollo y calcula el área total.



14. Calcula el área total de esta pirámide regular cuya base es un cuadrado de 18 cm de lado y su altura es de 40 cm.



15. ¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de 60 cm × 40 cm × 50 cm si la madera cuesta a razón de 18 €/m^2?

16. Halla la superficie total en cada caso:

    a) Tetraedro regular de 4 cm de arista.
    b) Cilindro de altura 4 cm y cuyo radio de la base mide 2 cm.
    c) Icosaedro de 3 dm de arista.
    d) Pirámide cuadrangular regular de 3 cm de altura y 8 cm de lado de la base.
    e) Esfera de 8 m de diámetro.

17. El radio de la base de un cilindro y de un cono mide 10 cm. Si la altura del cilindro es de 10 cm, averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:

    a. La misma área lateral.
    b. La misma área total.

18. Halla el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm y las aristas de la base, 2 cm.

19. Juan va a pintar la piscina de su jardín. La piscina tiene 10 m de largo por 6 m de ancho, y la profundidad es de 3m. ¿Cuántos kilogramos de pintura tendrá que comprar si gasta 1 kg por cada 2 m²?

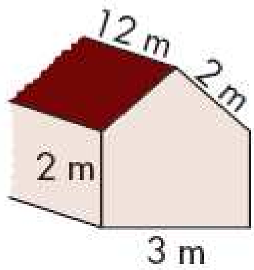
20. Queremos pintar dos habitaciones de una casa que tiene los techos de 3,2 m de altura. Las dimensiones de los suelos de las habitaciones son, una de 3 x 4 m, y la otra de 3,2 x 5 m. En los botes de pintura que vamos a utilizar leemos que cada uno contiene pintura suficiente para 40 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes tendremos que comprar? En el caso de que queramos dar dos capas de pintura, ¿Cuántos habría que comprar?

21. Luis y Ana tienen que forrar un tubo cilíndrico de 12 m de altura y 2 m de diámetro. Si el papel les cuesta 12 € / m², ¿cuánto se gastarán en forrar la superficie lateral del tubo?

22. Una tienda de campaña de forma cónica tiene una altura de 2 m y un diámetro de 1 m. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para forrarla incluyendo la base?

23. Averigua cuánto cuesta la reparación de esta casa sabiendo que h

    • Encalar las cuatro paredes, por dentro y por fuera, a 2 €/m^2.
    • Reparar el tejado, a 4,5 €/m^2.
    • Poner el suelo, a 22 €/m^2.



24. Sobre una de las bases de un prisma hexagonal regular de 12 cm. de lado de la base y 3 cm. de altura se ha construido una pirámide regular de 10 cm. de arista lateral. Hallar el área total del poliedro formado.

25. El metro cuadrado de cartón para construir envases de leche cuesta 60 céntimos de euro. Las medidas de un cartón de leche son 9,5 cm x 6,4 cm x 16,5 cm. ¿Cuánto cuesta cada envase?

26. Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m^2. ¿Cuál es el coste?

27. Una caja de botas deportivas tiene las siguientes dimensiones: 45 cm x 35 cm x 15 cm. Calcula el papel necesario para envolverla, sabiendo que tenemos que añadir un 20% de la superficie de la caja para que quede solapado.

28. Una fábrica de conservas de pimientos utiliza botes que tienen 3,5 cm de radio de la base y 8 cm de altura. Calcula las dimensiones de las etiquetas laterales.

29. La pirámide de Keops tiene una altura de 138 m y su arista de la base mide 227 m. Si por la restauración de cada metro cuadrado cobran 30 €, ¿cuánto costará restaurarla completamente?

30. ¿Cuántos nos cuesta la lona lateral de una tienda de campaña de forma cónica que tiene 1,5 m de radio de la base y 2,5 m de alto, si el m^2 de lona cuesta 30 €.

31. En una fuente se van a poner tres caños de bronce, de forma cilíndrica, de dimensiones 0,25 m de largo cada uno, dos de ellos con un radio de 3 cm y 20 dm. Calcula el bronce que se precisa.

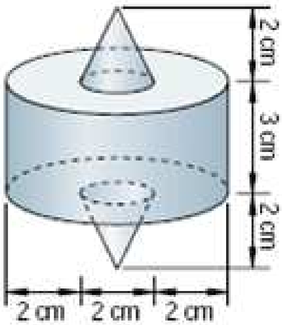
32. Para una fiesta de disfraces necesitas construir un gorro de mago de 20 cm de altura. Mides el contorno de tu cabeza y tiene 56,52 cm. ¿Cuánto medirá la generatriz de este cono? ¿Qué superficie de cartulina necesitaremos para construir el gorro de mago?

33. Un pintor ha cobrado 1 000 € por pintar el lateral de un depósito cilíndrico de 4 m de altura y 4 m de diámetro. ¿Cuánto deberá cobrar por pintar un depósito esférico de 2 m de radio?

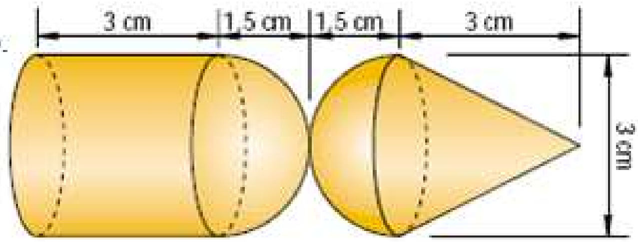
34. ¿Qué superficie de corcho (corteza de los alcornoques) se puede extraer del tronco cilíndrico de un alcornoque de 3 m de alto y 125,6 cm de contorno?

35. Determina el área de las siguientes figuras:

a.



b.



Unidad 4: S. M. D. Capacidad, masa y volumen.

El **volumen** de un cuerpo geométrico es la cantidad de espacio que ocupa. La medida del volumen de un cuerpo depende de la unidad elegida.

UNIDADES DE VOLUMEN.

El **metro cúbico** (m^3), es la unidad principal de volumen en el Sistema Internacional (S. I.). El metro cúbico se define como el volumen de un cubo de 1 m de arista, esto es, el volumen que ocupa un cubo que mide 1 m de ancho, 1 m de largo y 1m de alto.

Medir el volumen de un cuerpo es ver cuántas veces contiene una unidad determinada, es decir, si queremos medir en metros cúbicos el volumen de un cuerpo, hay que calcular cuántas veces contiene a un cubo de 1 m de arista.

Imagina que queremos calcular el volumen de una gota de agua. Tiene que ser muchísimo menos que 1 m^3. En cambio, si pretendemos saber cuántos m^3 de agua caben en un embalse, tendríamos que dar cifras de millones. Para medir volúmenes muy grandes o muy pequeños utilizamos los múltiplos y submúltiplos del m^3.

Cada unidad de volumen es 1.000 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 1000 veces menor que la unidad inmediata superior.

x 1.000 x 1.000 x 1.000 x 1.000 x 1.000 x 1.000

kilómetro cúbico	hectómetro cúbico	decámetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**

: 1.000 : 1.000 : 1.000 : 1.000 : 1.000 : 1.000

Estas medidas se pueden expresar en una sola unidad (**forma incompleja**) o con varias unidades (**forma compleja**). Por ejemplo:

2365,30248 m^3 = 2 dam^3 365 m^3 302 dm^3 480 cm^3

UNIDADES DE CAPACIDAD.

Un cuerpo geométrico hueco tiene la posibilidad de ser llenado completamente de líquidos, gases o sólidos finos, como la arena. El volumen correspondiente al espacio vacío de un cuerpo geométrico se denomina **capacidad**.

El **litro** (ℓ), es la unidad principal de volumen en el Sistema Internacional (S. I.). Los múltiplos y submúltiplos, unidades mayores y menores que el litro, son:

x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10

kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
kl	**hl**	**dal**	**l**	**dl**	**cl**	**ml**

: 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10

Cada unidad de capacidad es 10 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 10 veces menor que la unidad inmediata superior. Como en las medidas de volumen, éstas se pueden expresar en forma compleja o incompleja. Por ejemplo:

35dal 90 ℓ = 3500 dl + 900 dl = 4400 dl
256, 14 ℓ = 2 hl 5 dal 6 ℓ 1 dl 4 cl

Un litro es la capacidad de un cubo de 1 dm de arista, luego 1 litro equivale a 1 dm^3 de volumen. Existe una relación directa entre las unidades de capacidad y las de volumen tal y como muestra la siguiente tabla:

Unidades de volumen	m^3			dm^3			cm^3
Unidades de capacidad	kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml

UNIDADES DE MASA.

La cantidad de materia de un cuerpo se denomina **masa.** El **kilogramo** (kg), es la unidad principal de volumen en el Sistema Internacional (S. I.). Se define como la masa de 1 dm^3 de agua destilada a 4º C. Sus múltiplos y submúltiplos son:

tonelada	quintal	miriagramo	kilogramo	hectogramo	decagramo	gramo	decigramo	centigramo	miligramo
t	**q**	**mag**	**kg**	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**

Cada unidad de masa es 10 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 10 veces menor que la unidad inmediata superior.

SOLAMENTE en el caso del agua destilada a 4º C, basándose en la definición de kilogramo, pueden establecerse las siguientes equivalencias entre las medidas de longitud, masa y capacidad:

Unidades de volumen	m^3			dm^3			cm^3
Unidades de capacidad	kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
Unidades de masa	t	q	mag	kg	hg	dag	g

ACTIVIDADES

1. ¿Qué unidad utilizarías para medir el volumen de: una gota de agua – un pantano – una piscina – una botella de refresco – una cucharada de jarabe?

2. En una casa se han gastado en un año 12 dam^3 137 m^3 de agua. ¿Cuánto tienen que pagar, si el m^3 de agua cuesta 50 céntimos de euro?

3. Una fábrica ha producido en un año 2568 pastillas de jabón. Cada pastilla tiene un volumen de 75 cm^3.
   a. ¿Cuántos m^3 de jabón se han fabricado?
   b. Cada pastilla le cuesta al fabricante 25 céntimos de euro. ¿Cuánto gasta al año en la producción del jabón?
   c. Si quiere obtener un beneficio de 32190 € al año, ¿a qué precio debe vender cada pastilla?

4. Para construir una pared se han utilizado 1525 ladrillos de 4,5 dm^3 cada uno. Además, se han empleado 450 dm^3 de cemento en la construcción. ¿Qué volumen ocupa la pared?

5. ¿Cuántos vasos de 3 dl de capacidad se pueden llenar con una jarra de 1,5 ℓ ?

6. En una caja hay 12 botellas de agua de litro y medio. ¿Cuánto cuesta la caja, si el litro de agua se paga a 80 céntimos?

7. Se quieren poner 6hl, 4 dal y 8 l de aceite en latas de 45 dl cada una. ¿Cuántas latas harán falta? Si el litro cuesta a 4,05 €, ¿cuánto cuesta cada lata?

8. María tenía una pulsera de plata de 3,2 hg, unos pendientes de plata de 1,2 dag cada uno y una cadena de 350 dg. Ha fundido las tres cosas para hacer monedas de 25,3 gramos cada una. Calcula:
   a. Los gramos de plata que obtiene María al fundir las tres cosas.
   b. El número de monedas que obtiene y los gramos de plata que le sobran.
   c. Los gramos de plata que necesitaría comprar para obtener 15 monedas.

9. Halla la capacidad, en centilitros, de un cazo que puede contener hasta el borde 90 g de agua destilada.

10. Un bote de tomate pesa lleno de agua destilada 410 g y vacío 20 g. ¿Cuál es su capacidad en decilitros y centilitros?

11. Un depósito de agua se halla al 70% de su capacidad con 3,5 kl 6 hl 80 dal. Expresa en litros y en m^3 la capacidad del depósito.

12. Un pantano contiene 120 millones de m^3 de agua. En verano pierde 750000 m^3 por día. ¿Cuántos m^3 ha perdido en un mes? ¿Cuántos hm^3 quedarán después de 30 días?

13. Un vinatero compra 3 m^3. Primero vende 128 litros y el resto lo distribuye en 8 toneles iguales. ¿Cuántos dm^3 ha echado en cada tonel?

14. Un caramelo tiene un volumen de 1,3 cm^3. ¿Cuántos caramelos caben en una caja de 0,4498 dm^3?

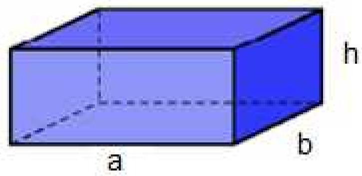
15. Una caja contiene 24 botes de refresco y cada bote contiene 33 cl. Si el litro de refresco vale 1 €. ¿Cuánto vale cada bote? ¿Cuánto vale cada caja?

Unidad 5: Volúmenes de cuerpos geométricos.

1. VOLUMEN DE POLIEDROS REGULARES.

El volumen de un cuerpo expresa el número de veces que contiene al cubo unidad.

- El **ortoedro** es un cuerpo cuyas caras son todas rectángulos. Su volumen es igual al producto de sus tres dimensiones.

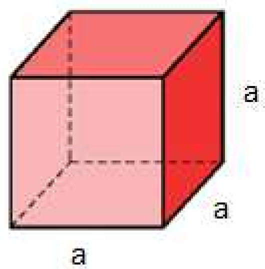


$$\boxed{V_{ortoedro} = \text{largo} \cdot \text{alto} \cdot \text{ancho} = a \cdot b \cdot h}$$

Como el producto a · b es el área de la base, A_B, el volumen del ortoedro es igual al área de la base por la altura.

$$\boxed{V_{ortoedro} = A_B \cdot h}$$

- El **cubo** es un ortoedro cuyas caras son cuadrados iguales. Tiene las tres dimensiones iguales: largo, ancho y alto.



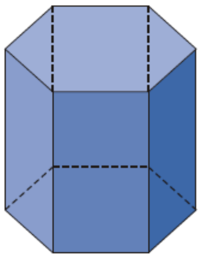
$$\boxed{V_{cubo} = \text{largo} \cdot \text{alto} \cdot \text{ancho} = a \cdot a \cdot a = a^3}$$

El volumen del cubo es igual a la medida de su arista al cubo.

$$\boxed{V_{cubo} = a^3}$$

- El volumen de cualquier **prisma** es:

$$\boxed{V_{prisma} = A_{base} \cdot h}$$



Si el polígono de la base es regular,

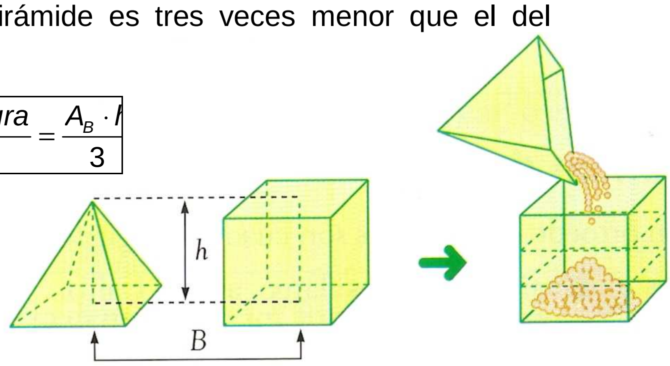
$$A_{base} = \frac{Perímetro \cdot \text{ apotema}}{2}$$, por lo que, en este caso:

$$\boxed{V_{prisma} = \frac{P \cdot a_p}{2} \cdot h}$$

siendo P el perímetro del polígono de la base y a_p su apotema.

- Consideremos un prisma y una pirámide de la misma altura e igual base. Si llenamos con arena fina o con agua la pirámide y la vaciamos en el prisma, comprobamos que para llenar el prisma se necesitaría el contenido exacto de tres pirámides. El volumen de la pirámide es tres veces menor que el del prisma.

$$\boxed{V_{pirámide} = \frac{Volumen \text{ prisma}}{3} = \frac{A_{base} \cdot altura}{3} = \frac{A_B \cdot h}{3}}$$



Act. 1. Un paralelepípedo tiene una altura de 12 cm y sus bases son rombos cuyas diagonales miden 7 cm y 4 cm. Calcula su volumen.

Act. 2. Calcula el volumen de una piscina que tiene 12 m de largo, 9 m de ancho y 2 m de profundidad. Expresa el resultado en m^3 y en litros.

Act. 3. Un aljibe de forma de prisma hexagonal regular tiene 72 metros de perímetro. ¿Qué volumen de agua, expresado en litros, contienen dicho aljibe cuando el agua sube 2 metros?

Act. 4. Para su cumpleaños María recibe un acuario de 48 cm. de largo y 30 de ancho. Llena su acuario de agua a una altura de 28 cm. y quiere comprar peces que necesitan cada uno un litro de agua para vivir. ¿Cuántos podrá comprar?

Act. 5. Se quiere construir un monumento en forma de pirámide regular de base cuadrada con una altura de 30 m. Si se han necesitado 2.000 m^3 de piedra, ¿podrías indicar cuál es la medida del lado de la base de la pirámide?

Act. 6. La torre Picasso de Madrid es un edificio con forma de una inmensa caja, cuyas dimensiones son 40 m, 40 m y 150 m. Imagina que está vacía por dentro.

a. ¿Cuántas cajas cúbicas de 1 m de arista podrías introducir?
b. Si pudieras poner estas cajas una encima de otra formando una gran columna, ¿qué altura alcanzaría?
c. Imagina ahora que forramos sus fachadas con paneles de vidrio de 4 m por 5 m, ¿cuántos paneles necesitaremos?

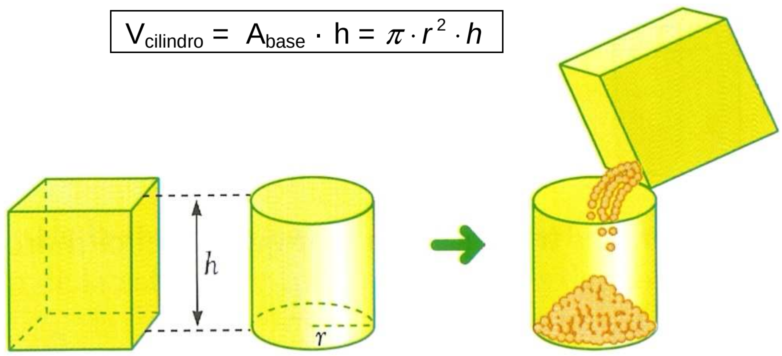
Act. 7. Durante una tormenta se registraron unas precipitaciones de 80 litros por metro cuadrado. ¿Qué altura alcanzaría el agua en un recipiente cúbico de 10 cm de arista?

Act. 8. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las *siete maravillas del mundo antiguo*. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

2. VOLUMEN DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

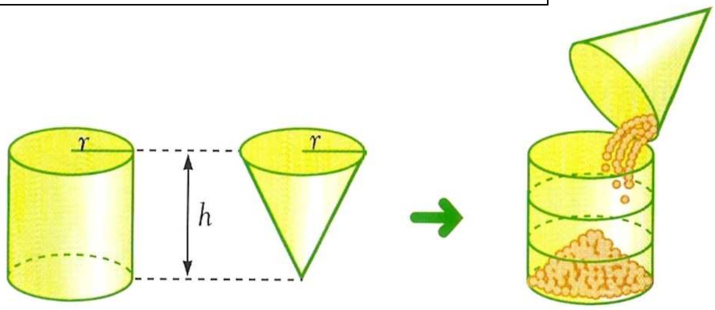
- Consideremos un ortoedro y un **cilindro** de la misma altura y bases de igual superficie. Si llenamos con arena fina o con agua el ortoedro y la vaciamos en el cilindro, comprobamos que cabe exactamente la misma cantidad. El volumen del ortoedro y del cilindro son iguales.

$$\boxed{V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$



- Consideremos un cilindro y un **cono** de la misma altura e igual base. Si llenamos con arena fina o con agua el cono y lo vaciamos en el cilindro, comprobamos que para llenar el cilindro se necesitaría el contenido exacto de tres conos. El volumen del cono es tres veces menor que el del cilindro.

$$V_{cono} = \frac{Volumen \text{ cilindro}}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

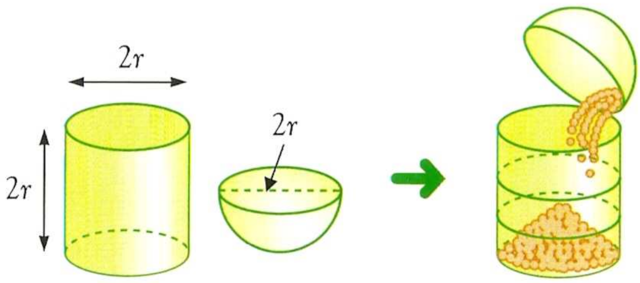


- El volumen de una **esfera** se determina a partir de un cilindro que tenga la altura y el diámetro iguales al diámetro de la esfera.

(Diámetro esfera = Diámetro cilindro = Altura cilindro = 2r)

Si llenamos con arena fina o agua la semiesfera y la vaciamos en el cilindro, comprobamos que caben tres semiesferas de arena. El volumen de la semiesfera es un tercio del volumen del cilindro, luego el volumen de la esfera será igual a dos tercios del volumen del cilindro.

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



Act. 9. Una bola de billar de 6 cm de diámetro se hace de un material que cuesta 42 € el dm^3, ¿cuál es su superficie?, ¿cuál será su precio?

Act. 10. ¿Cuántos vasos cilíndricos de 19 cm de altura y 2,7 cm de radio se pueden llenar con 3,8 litros de refresco?

Act. 11. Halla el volumen que ocupa un helado cuyo cucurucho es un cono de radio 3 cm y altura 7 cm, y la bola de helado es una semiesfera de radio 3 cm.

Act. 12. Una vasija cilíndrica tiene de superficie total 392,5 cm^2. Calcula su capacidad sabiendo que su altura es igual al diámetro de su base. (La vasija no tiene tapa)

Act. 13. Si el volumen de una cisterna cilíndrica es de 33 m^3 y su altura es de 10 m. ¿Cuánto medirá el radio de la base?

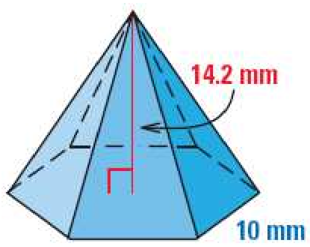
ACTIVIDADES

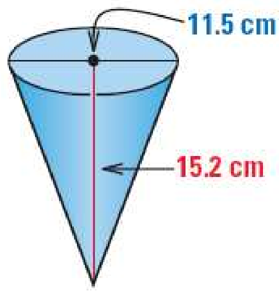
1. Calcula el volumen de piedra que encierra el monolito de la figura cuyas piezas tienen bases cuadradas de 40, 30 y 20 dm de lado, respectivamente, y sus alturas son 5, 10 y 50 dm.

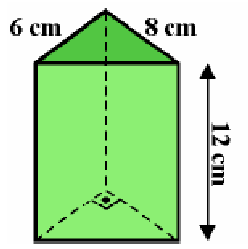
2. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 8 cm de altura y arista básica 5 cm.

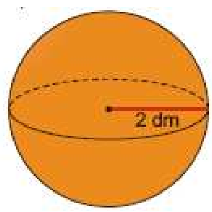
3. Halla el área lateral total y el volumen de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm y la arista de la base 2 cm.

4. Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:



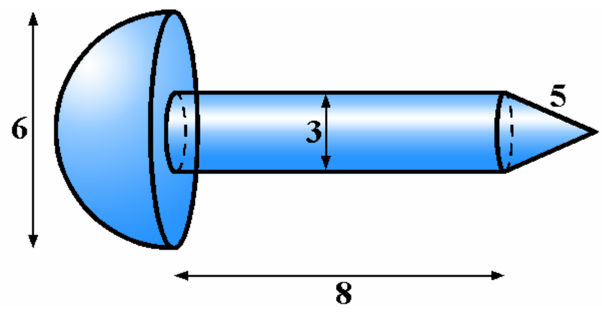






5. Calcula el volumen de una pirámide de 15 m de altura y cuya base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 m de radio.

6. Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo, cuyas medidas están dadas en centímetros.



7. ¿Cuál es el radio de una esfera cuya superficie es igual a la de un cilindro circular de 10π cm^2?

8. En un vaso cilíndrico de 36 cm. de diámetro que contiene cierta cantidad de agua, se echan dos bolas de igual diámetro y el nivel del agua sube 6 cm. Hallar el radio de estas bolas.

9. El diámetro de un depósito esférico mide 12 m. ¿Cuántos bidones cilíndricos de 1 m de altura y 60 cm de diámetro podrán llenarse con el líquido almacenado en el depósito?

10. Una fábrica de cristal produce vasos cilíndricos de 6 cm de diámetro y 9 cm de altura.

    a. ¿Qué cantidad de cristal necesita para elaborar cada vaso?
    b. ¿Cuántos centilitros de agua caben en cada uno?

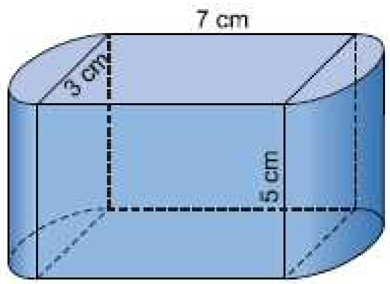
11. Luis ha comprado un helado de cucurucho cuyas dimensiones son: 5 cm de diámetro y 15 cm de altura.

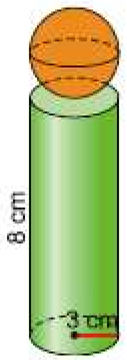
    a. ¿Qué cantidad de galleta se comerá?
    b. Si está lleno el helado de fresa sin sobresalir nada del borde, ¿qué cantidad de fresa comerá?

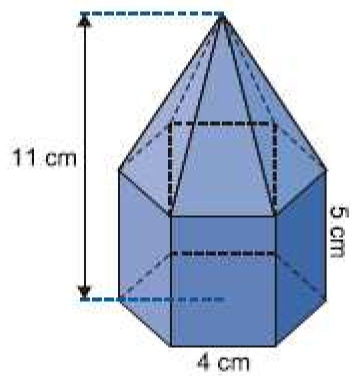
12. Halla el volumen de un cono sabiendo que el área lateral es de 20 cm^2 y que la generatriz mide el triple que el radio de la base.

13. ¿Cuántos metros cúbicos de hormigón serán necesarios para construir una cisterna de forma cúbica con capacidad para 8.000 litros de agua si las paredes han de tener 0,2 metros de grueso y el fondo 0,12 m.?

14. Calcula el volumen total de estas figuras:







15. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.

    a. ¿Cuánto costará pintarla?
    b. ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

16. En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

17. En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

18. Se ha construido un depósito de gas de forma esférica, con una superficie de 355,3 m^2. ¿Qué volumen de gas puede contener?

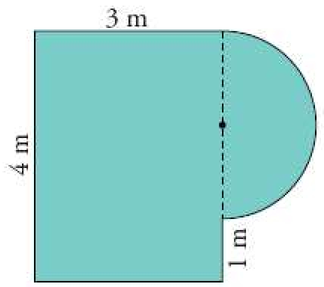
19. La cisterna de un camión, para trasportar gasolina, tiene forma cilíndrica y su diámetro mide 2,4 m. Calcula qué longitud debe tener para trasportar 30000 litros de combustible.

20. El cubo de Rubik tiene una superficie total de 188,16 cm^2. Calcula su volumen.

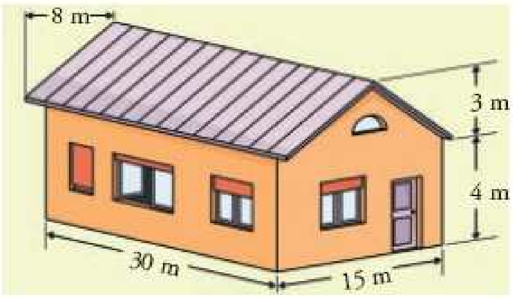
21. Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:

   a. La cantidad de agua que se ha derramado.
   b. La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

22. Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura.



23. Observa la figura y calcula:



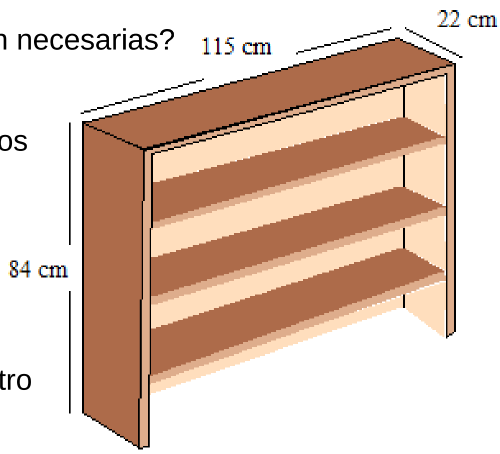
   a. El coste de la construcción del tejado, sabiendo que ha salido a 85 € el metro cuadrado.
   b. El número de radiadores que se deben instalar en su interior, sabiendo que se necesita un radiador por cada 15 m^3.

24. Un reloj de arena está formado por dos conos rectos unidos por su cúspide. La altura del reloj es de 10 cm y su diámetro 5 cm. Calcular el volumen de arena que hay en el interior de uno de los conos sabiendo que cae 0, 1 cm^3 de arena por segundo. ¿Cuánto tiempo tarda en pasar la arena de un cono al otro?

25. Las pelotas de tenis se venden en latas de forma cilíndrica que contienen 3 pelotas cada una. Si el diámetro de la lata es de 6,5 cm, calcular el volumen que queda libre en el interior de una lata.

26. Se ha construido una estantería de libros y ahora se quiere barnizarla (despreciar el espesor de la madera).

   a. Calcula el área total a barnizar, en m^2.
   b. Si una lata de barniz cubre 2 m^2, ¿cuántas serán necesarias?
   c. ¿Cuál es el volumen que ocupa la biblioteca?



27. En los aviones las azafatas reparten refrescos a los pasajeros en botes que miden 5 cm de diámetro y 8,8 cm de alto. Calcula el volumen de cada bote de refresco. ¿Puede contener 15 cl cada bote?

28. Una castañera vende cucuruchos de castañas asadas, los pequeños a 1€ y los grandes a 2€. El diámetro de los cucuruchos pequeños mide 8cm y la altura 15 cm. El diámetro de los cucuruchos grandes mide 12 cm y la altura 20 cm. Si los cucuruchos los llena hasta arriba de castañas, ¿qué cucuruchos no debería vender?

ÍNDICE