Educación Secundaria para Personas Adultas

(E. S. P. A.)

MATEMÁTICAS

MÓDULO II – NIVEL I

(2º E. S. P. A.)

C. E. A "MAR MENOR"

Curso 2009-2010

ÍNDICE

Unidad 1: Fracciones y decimales.

"Falta un cuarto de hora para que termine la película", "la mesa mide metro y medio de largo", "he comprado cuarto kilo de queso", "los sábados a medio día emiten mi serie favorita", " han puesto un sillón en medio de la habitación"; todas estas frases y otras muchas las hemos oído sin pensar que estamos empleando fracciones. Pero, ¿sabes qué son? Vamos a descubrir su significado.

1. CONCEPTO DE FRACCIÓN.

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros (b $\neq 0$).

Una fracción tiene dos términos: a, recibe el nombre de **NUMERADOR** y b, que recibe el nombre de **DENOMINADOR**.

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{Numerador} \\ \longrightarrow \textbf{Denominador} \end{array}$$

Para leer una fracción leemos primero el numerador como si fuera un número normal, después se lee el denominador de la siguiente forma:

- Si es el 1 se lee enteros.
- Si es el 2 se lee medios.
- Si es el 3 se lee tercios.
- Si es el 4 se lee cuartos.
- Si es el 5 se lee quintos.
- Si es el 6 se lee sextos.
- Si es el 7 se lee séptimos.
- Si es el 8 se lee octavos.
- Si es el 9 se lee novenos.
- Si es el 10 se lee décimos.
- Si es más de 10 se lee el número terminado en – avos.
- Si es una potencia de 10 se lee el número terminado en – ésimos.

Por ejemplo:

$\frac{6}{1} \rightarrow$ Seis enteros.

$\frac{7}{4} \rightarrow$ Siete cuartos.

$\frac{2}{9} \rightarrow$ Dos novenos.

$\frac{3}{10} \rightarrow$ Tres décimos.

$\frac{6}{13} \rightarrow$ Seis treceavos.

$\frac{-5}{42} \rightarrow$ Menos cinco cuarenta y dos avos.

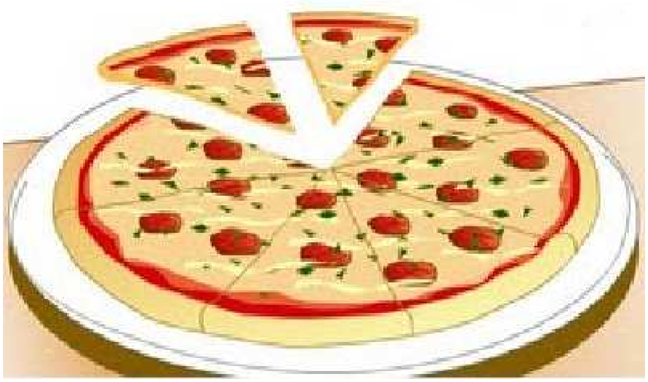
$\frac{29}{100} \rightarrow$ Veintinueve centésimos.

$\frac{51}{1000} \rightarrow$ Cincuenta y uno milésimos.

Una misma fracción de números naturales puede tener diferentes significados:

1.- Puede hacer referencia a una **parte de la unidad**: Si dividimos un objeto o unidad en varias partes iguales, a cada una de ellas, o a un grupo de esas partes, se las denomina fracción. EL denominador de la fracción indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad mientras que el numerador indica el número de partes que se toman.

Por ejemplo: he dividido una pizza en ocho porciones iguales y voy a comerme dos, la fracción



de pizza que voy a tomar es $\frac{2}{8}$; el numerador, 2, indica el número de partes que se toman, mientras que el denominador, 2, indica el número de partes iguales en que se divide la pizza.

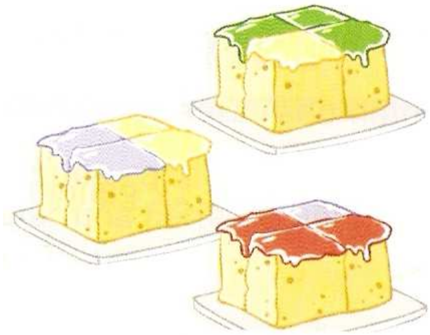
Con una fracción también representamos una parte del total. Por ejemplo: en esta jaula, los leones representan los $\frac{4}{7}$ del total de los animales encerrados en ella; el numerador, 4, indica el número de leones que hay en la jaula, mientras que el denominador, 7, indica el número de animales que hay en el interior de la jaula.

2.- Puede representar una **división:** Una fracción también se puede interpretar como una división, el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor.

- Si al dividir el numerador entre el denominador la división es exacta, entonces la fracción representa un número natural. Por ejemplo: $\frac{6}{3}=2$, la fracción $\frac{6}{3}$ representa al número natural 2.

- Si al dividir el numerador entre el denominador la división es entera, entonces la fracción representa un número decimal. Por ejemplo: $\frac{6}{4}=1,5$, la fracción $\frac{6}{4}$ representa al número decimal 1,5.

Por ejemplo:



Se reparten tres pasteles entre cuatro amigos. A cada uno le corresponden $\frac{3}{4}$ de pastel.

El reparto también se resuelve con una división, así:

3 pasteles entre 4 niños $\longrightarrow$ $\frac{3}{4}$ = 3 : 4 = 0,75. $\Rightarrow$ A cada niño le corresponde $\frac{3}{4}$ de pastel ó 75 centésimas de pastel (el 75% de un pastel).

<u>Fracciones con números enteros:</u>

Observa:

$$\frac{+12}{+6}=(+12):(+6)=+2\Rightarrow\frac{+12}{+6}=\frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{-6}=(-12):(-6)=+2\Rightarrow\frac{-12}{-6}=\frac{12}{6}$$

$$\frac{+12}{-6}=(+12):(-6)=-2\Rightarrow\frac{+12}{-6}=-\frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{+6}=(-12):(+6)=-2\Rightarrow\frac{-12}{+6}=-\frac{12}{6}$$

Toda fracción de **números enteros** se puede escribir como una fracción de **números naturales** que será **positiva** si el numerador y el denominador son iguales y **negativa** si tienen distinto signo.

3.- <u>Puede ser un **operador:**</u> También podemos utilizar una fracción como un operador sobre una cantidad. Para calcular la fracción de un número, se multiplica dicho número por el numerador de la fracción y el resultado se divide por el denominador de la fracción.

Por ejemplo: $\frac{2}{3}$ de 12 = (12 · 2) : 3 = 24 : 3 = 8

Veamos otro ejemplo: María y sus hermanos se reparten una herencia de 27 millones de euros. Si a ella le han correspondido las tres quintas partes del total de la herencia, ¿qué cantidad de dinero recibirá?

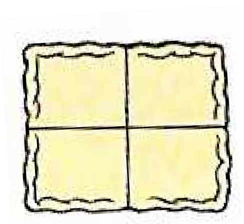
$\frac{3}{5}$ de 27 000 000 = (27 000 000 · 3) : 5 =

= 81 000 000: 5 = <u>16 200 000 € recibirá María</u>.

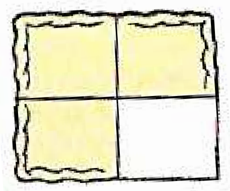
2. COMPARACIÓN DE FRACCIONES CON LA UNIDAD.

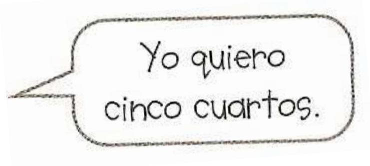
Alberto vende empanadas por trozos. Hoy ha recibido varias empanadas y las ha partido en cuartos. Observa la fracción de empanada que quieren varios clientes:

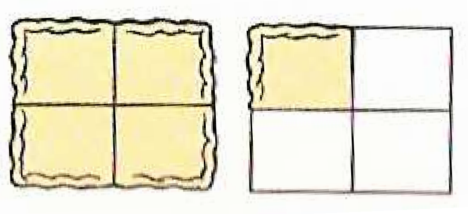
Marina: 



Nacho: 



Irene: 



Marina quiere $\frac{4}{4}$ de empanada, es decir, una empanada completa. La fracción $\frac{4}{4}$ es igual a la unidad ($\frac{4}{4}$ = 1).

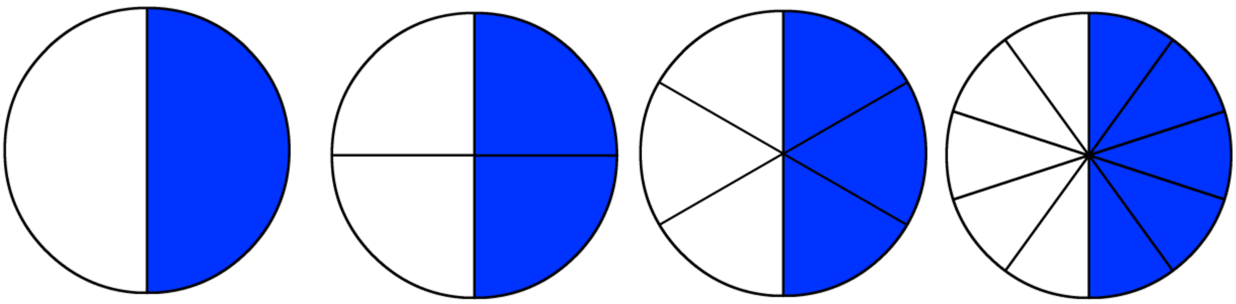
Nacho quiere $\frac{3}{4}$ de empanada, es decir, menos de una empanada completa. La fracción $\frac{3}{4}$ es menor que la unidad ($\frac{3}{4} < 1$).

Irene quiere $\frac{5}{4}$ de empanada, es decir más de una empanada completa. La fracción $\frac{5}{4}$ es mayor que la unidad ($\frac{5}{4} > 1$).

Una fracción es **menor que la unidad** (y, por tanto, vale menos de 1) cuando el numerador es menor que el denominador. Por ejemplo: $\frac{3}{7}$. Una fracción es **mayor que la unidad** (y, por tanto, vale más de 1) cuando el numerador es mayor que el denominador. Por ejemplo: $\frac{7}{3}$. Una fracción es igual a la unidad cuando el numerador y el denominador son iguales. Por ejemplo: $\frac{7}{7}$

3. FRACCIONES EQUIVALENTES.

Fíjate en la fracción que hay representada en cada dibujo:



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{10}$

Todas las fracciones representan la misma parte del círculo, tienen por lo tanto el mismo valor.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$$

Las fracciones que representan la misma parte de la unidad reciben el nombre de **fracciones equivalentes.**

Observa que los productos cruzados de los términos de dos fracciones equivalentes son iguales:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \rightarrow \begin{cases} 1\cdot 4=4 \\ 2\cdot 2=4 \end{cases} \qquad \frac{3}{6}=\frac{5}{10} \rightarrow \begin{cases} 3\cdot 10=30 \\ 6\cdot 5=30 \end{cases} \qquad \frac{2}{4}=\frac{3}{6} \rightarrow \begin{cases} 2\cdot 6=12 \\ 3\cdot 4=12 \end{cases}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES EQUIVALENTES: los productos cruzados de los términos de dos fracciones equivalentes son iguales, esto es, el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Por ejemplo: $\frac{-45}{+9}=\frac{+15}{-3}\;\rightarrow\;\left\{\begin{matrix}(-45)\cdot(-3)=+135\\(+9)\cdot(+15)=+135\end{matrix}\right\}$

<u>**Obtención de fracciones equivalentes.**</u>

Podemos conseguir fracciones equivalentes a una dada de dos formas:

- Por **amplificación**: Se multiplican el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\overbrace{\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}}^{x5}$.
- Por **simplificación:** Se dividen el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\overbrace{\frac{30}{45}=\frac{2}{3}}^{:15}$

Cuando una fracción ya no se puede simplificar más se llama **fracción irreducible.** Por ejemplo: $\overbrace{\frac{120}{75}=\frac{24}{15}}^{:5}\!\!\overbrace{=\frac{8}{5}}^{:3}$. El numerador y el denominador de la fracción $\frac{8}{5}$ no tienen divisores comunes por lo que se trata de una fracción irreducible.

4. COMPARACIÓN DE FRACCIONES.

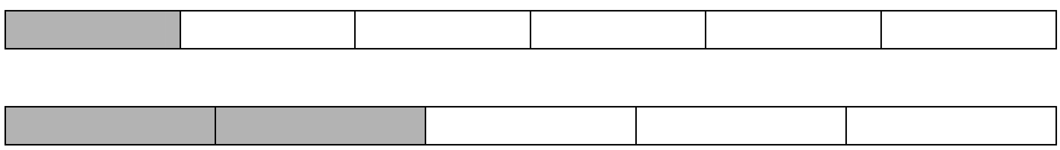
* De todos los viajeros que viajan en un avión, $\frac{1}{6}$ son americanos y $\frac{2}{5}$ son africanos. ¿De dónde son el mayor número de viajeros del avión?

¿De cuántas formas podemos comparar estas dos fracciones?

- <u>Gráficamente:</u>

$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{5}$



En el dibujo podemos observar que $\frac{1}{6}<\frac{2}{5}$.

- Efectuando los productos cruzados:

$$\begin{array}{ccc} 5 & < & 12 \\ \frac{1}{6} & \times & \frac{2}{5} \end{array}$$

Puesto que el producto 5 · 1 = 5 es menor que el producto 6 · 2 = 12, la fracción $\frac{1}{6}$ es menor que la fracción $\frac{2}{5}$.

- Comparando los números decimales:

Obtenemos el número decimal que corresponde a cada fracción dividiendo el numerador entre el denominador y los comparamos.

$$\frac{1}{6} = 0{,}17 < 0{,}4 = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{5}.$$

- Buscando fracciones equivalentes con igual denominador:

> Para reducir fracciones a común denominador:
>
> - Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
> - Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondientes.

m. c. m (6 ,5) = 30

$$\frac{1}{\underset{30\,:\,6\,=\,5}{6}} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30} \quad ; \quad \frac{2}{\underset{30\,:\,5\,=\,6}{5}} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30} \quad \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \\ \frac{2}{5} = \frac{12}{30} \end{cases}$$

Como $\frac{5}{30}$ es menor que $\frac{12}{30}$, se tiene que $\frac{1}{6} < \frac{2}{5}$.

Así pues, podemos afirmar que en el avión viaja un mayor número de africanos que de americanos.

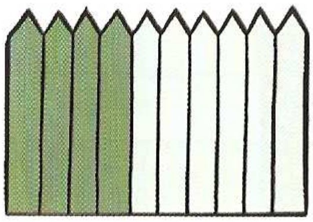
$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} > \frac{1}{6} \quad \frac{2}{5}$

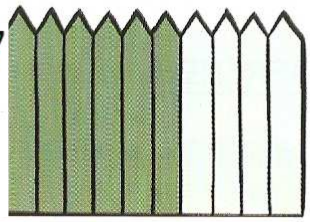
$\frac{1}{6}$

Si las fracciones tienen el mismo numerador o bien el mismo denominador, podemos aplicar cualquiera de los métodos anteriores pero la comparación se puede hacer de forma directa, Veámoslo:

* Fernando y Teresa están pintando la valla del jardín de su casa. Fernando ha pintado $\frac{6}{10}$ de la valla y Teresa $\frac{4}{10}$. ¿Cuál de los dos ha pintado la mayor parte de la valla?



Las dos vallas son iguales, por lo tanto, si las consideramos divididas en el mismo número de partes, sólo habrá que comparar los numeradores de las fracciones, puesto que ellos nos indican cuántas partes de la valla ha pintado cada uno.



$6 > 4 \Rightarrow \frac{6}{10} > \frac{4}{10}$. Luego, Fernando ha pintado mayor parte de valla.

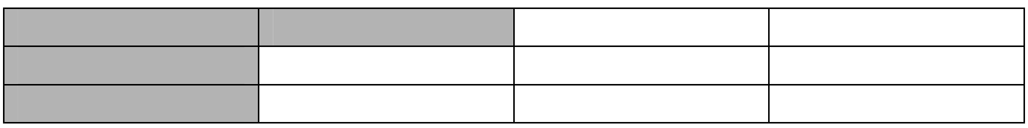
Comparación de fracciones de igual denominador. De dos o más fracciones que tienen igual denominador, es mayor la que tiene el numerador mayor.

* Alberto y Carlos tienen que poner hoy dos carteles publicitarios. Alberto ha cubierto $\frac{4}{9}$ del cartel y Carlos $\frac{4}{12}$. ¿Cuál ha cubierto mayor parte del cartel?

Como los dos carteles son iguales, si el número de divisiones es mayor, éstas deberán ser más pequeñas, por lo tanto, las divisiones del cartel de Carlos son más pequeñas (al ser 12 > 9) y en consecuencia Alberto ha cubierto la mayor parte del cartel (ya que ambos han pintado la misma cantidad de partes de sus respectivos carteles, 4).

Alberto $\frac{4}{9}$

Carlos $\frac{4}{12}$



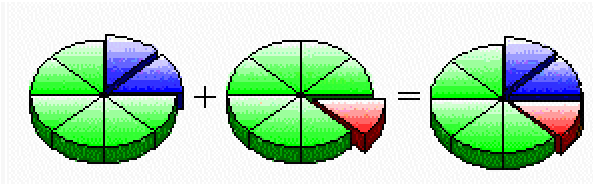
$\frac{4}{9} > \frac{4}{12} \Rightarrow$ Alberto ha cubierto la mayor parte del cartel.

Comparación de fracciones de igual numerador. De dos o más fracciones que tienen igual numerador, es mayor la que tiene el denominador menor.

5. OPERACIONES CON FRACCIONES.

5.1. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR.

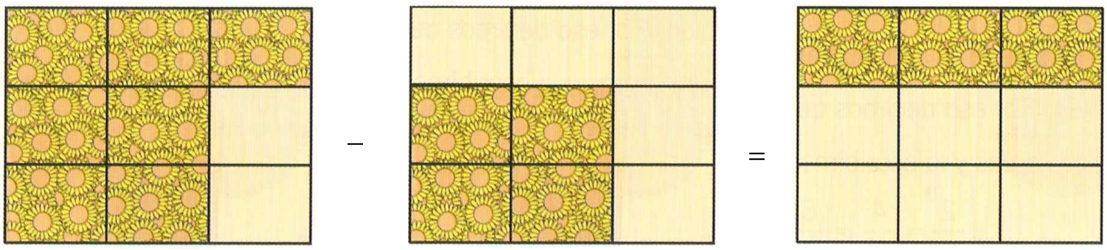
* Esta mañana tomé para desayunar $\frac{2}{8}$ de una ensaimada que trajeron ayer mis padres de Mallorca y esta tarde me he comido $\frac{1}{8}$ más para merendar. ¿Qué fracción de la ensaimada me he comido?



$\frac{2}{8} \quad + \quad \frac{1}{8} \quad = \quad \frac{3}{8} \Rightarrow$ He comido $\frac{3}{8}$ de la ensaimada.

Suma de fracciones de igual denominador. Para sumar dos o más fracciones de igual denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

* Alicia tiene una parcela dividida en partes iguales; $\frac{7}{9}$ están con girasoles. Hoy ha segado $\frac{4}{9}$ de la parcela. ¿Qué fracción de la parcela queda con girasoles?

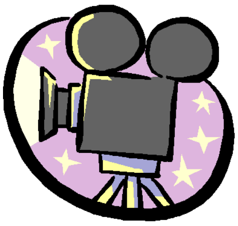


$\frac{7}{9} \quad - \quad \frac{4}{9} \quad = \quad \frac{3}{9}$

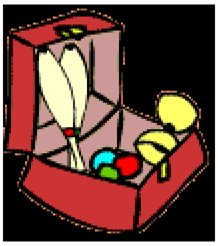
Quedan $\frac{3}{9}$ de la parcela sin segar, con girasoles.

Resta de fracciones de igual denominador. Para restar fracciones de igual denominador, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

5.2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR.



$\frac{2}{7}$



¿?

$\frac{1}{4}$

Un grupo de compañeros ha decidido ir el sábado por la tarde a un centro de ocio. Los $\frac{2}{7}$ van al cine, $\frac{1}{4}$ a la bolera y el resto se van a quedar viendo un espectáculo de malabares que hay en la calle. ¿Qué fracción del grupo entra al centro comercial? ¿Qué fracción del grupo se queda fuera viendo el espectáculo?

* La fracción del grupo que entra al centro comercial será: $\frac{2}{7}+\frac{1}{4}$

- Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m. c. m (7, 4) = 28.
- Reducimos las dos fracciones a común denominador, que será el m. c. m.

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{7\cdot 4}+\frac{1\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{8}{28}+\frac{7}{28}$$

- Sumamos los numeradores y dejamos el mismo denominador:

$\frac{8}{28}+\frac{7}{28}=\frac{15}{28} \Rightarrow$ Entran en el centro de ocio los $\frac{15}{28}$ del grupo de compañeros.

* La fracción de alumnos que se queda fuera del centro de ocio será: $1-\frac{15}{28}$ (restamos al total, la unidad, los alumnos que han entrado al centro de ocio).

- Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m. c. m (1,28) = 28.
- Reducimos las dos fracciones a común denominador, que será el m. c. m.

$$1-\frac{15}{28}=\frac{1\cdot 28}{1\cdot 28}-\frac{15\cdot 1}{28\cdot 1}=\frac{28}{28}-\frac{15}{28}$$

- Restamos los numeradores y dejamos el mismo denominador:

$\frac{28}{28}-\frac{15}{28}=\frac{13}{28} \Rightarrow$ Se quedan viendo el espectáculo los $\frac{13}{28}$ del grupo de compañeros.

Para sumar o restar fracciones que tengan distinto denominador, las reducimos a común denominador, sumamos o restamos los numeradores de las fracciones resultantes y dejamos el denominador común.

5.3. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES.

Necesitamos comprar estos ingredientes para hacer un bizcocho. ¿Qué cantidad de harina necesitaremos para hacer cinco bizcochos?

Para hallar la cantidad de harina multiplicaremos $\frac{3}{4} \cdot 5$

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

Necesitamos comprar $\frac{15}{4}$ kg de harina.

Observa que $\frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4}$, así pues:

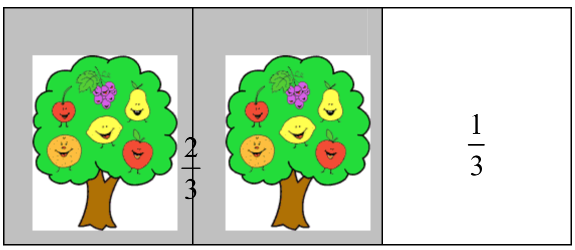
> **Para multiplicar una fracción por un número entero**, se multiplica el numerador por el número entero y se deja el mismo denominador.

Tenemos un huerto en el que queremos plantar árboles frutales. Dedicaremos a ellos los $\frac{2}{3}$ del huerto. De estos árboles, $\frac{1}{5}$ serán manzanos. ¿Qué fracción del huerto se dedicará a cultivar manzanas?

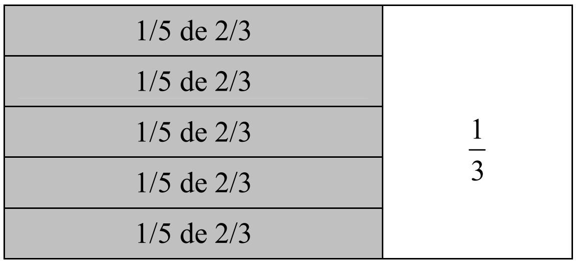
El huerto está dividido en tres partes:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

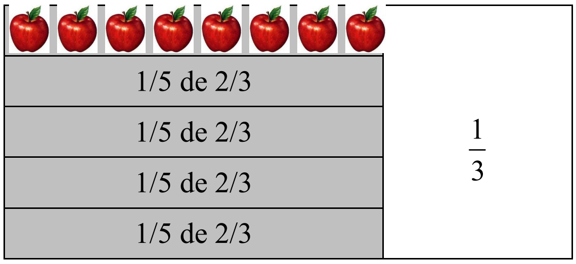
Dedicaremos $\frac{2}{3}$ del huerto a árboles frutales:



La zona de frutales se divide en cinco partes:

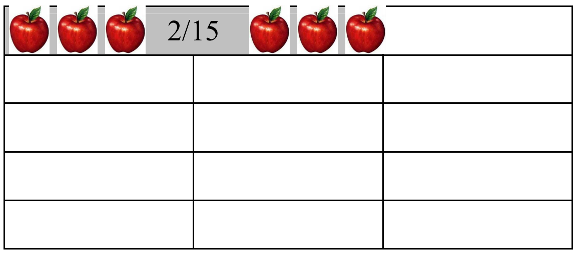


De la zona de frutales, se va a dedicar una parte a manzanas:



Por lo tanto, la zona destinada a manzanas es $\frac{2}{15}$:

$$\frac{1}{5} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$



El producto de dos o más **fracciones** es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y, como denominador, el producto de los denominadores.

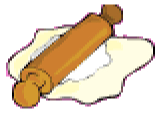
Cuando el producto de dos fracciones es igual a 1, dichas **fracciones** se dice que son **inversas**. Fíjate que dos fracciones inversas tienen el numerador y el denominador invertidos.

$\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ son inversas porque $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$

$\frac{-7}{4}$ y $\frac{4}{-7}$ son inversas porque $\frac{-7}{4} \cdot \frac{4}{-7} = \frac{-7 \cdot 4}{4 \cdot (-7)} = \frac{-28}{-28} = 1$

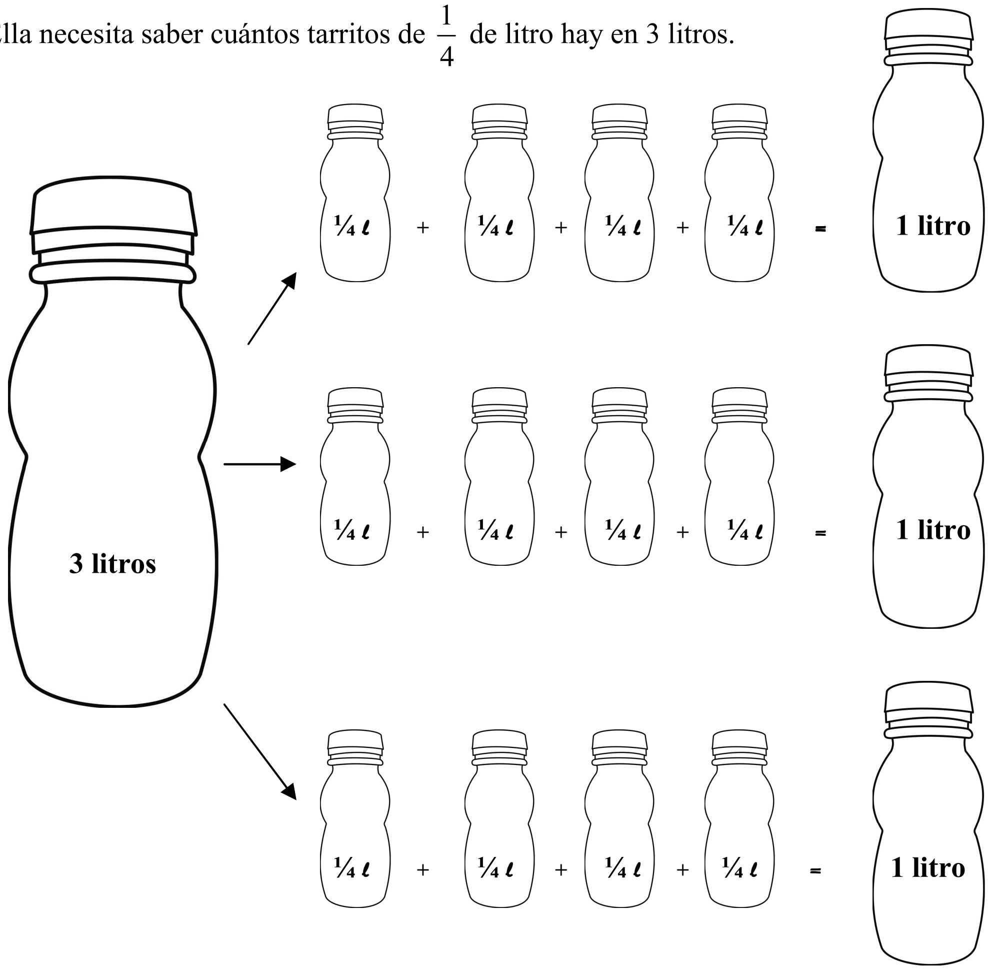
3 y $\frac{1}{3}$ son inversas porque $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{3}{3} = 1$

5.4. DIVISIÓN DE FRACCIONES.



Doña Leonor fue a la tienda a comprar 3 litros de crema que le hacían falta para preparar un pedido de pasteles, pero en la tienda sólo encontró tarritos de crema de $\frac{1}{4}$ de litro. Doña Leonor quiere saber cuántos tarritos tiene que comprar para completar los 3 litros de crema que le hace falta.

Ella necesita saber cuántos tarritos de $\frac{1}{4}$ de litro hay en 3 litros.



Hemos repartido los 3 litros en envases de $\frac{1}{4}$ de litro, hemos realizado por lo tanto la división 3: $\frac{1}{4}$. Observa que cada litro contiene 4 tarritos de $\frac{1}{4}$ así que, 3 litros contendrán 3 veces 4, es decir 12 tarritos de crema.

$3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 12$ tarritos de crema son necesarios para obtener 3 litros de crema.

Este problema nos recuerda que la división es la operación inversa de la multiplicación y de ahí la siguiente regla para dividir fracciones:

El **cociente de dos fracciones** es la fracción resultante de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

5.5. OPERACIONES COMBINADAS.

Para resolver algunos problemas, a veces tenemos necesidad de encadenar varias operaciones.

Para operar con fracciones seguiremos el mismo orden que con los números naturales y los números enteros:

1º Se efectúan los paréntesis y corchetes.
2º A continuación realizamos las multiplicaciones y divisiones.
3º Finalmente hacemos las sumas y restas.

Recordemos que cuando aparecen operaciones que tienen la misma importancia se realizan en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Efectuamos el paréntesis — Efectuamos la multiplicación — Efectuamos la suma — Simplificamos (: 4)

6. NÚMEROS DECIMALES.

Los números decimales constan de dos partes separadas por una coma; la parte colocada a la izquierda de la coma es la **parte entera** y la situada a la derecha la **parte decimal**.

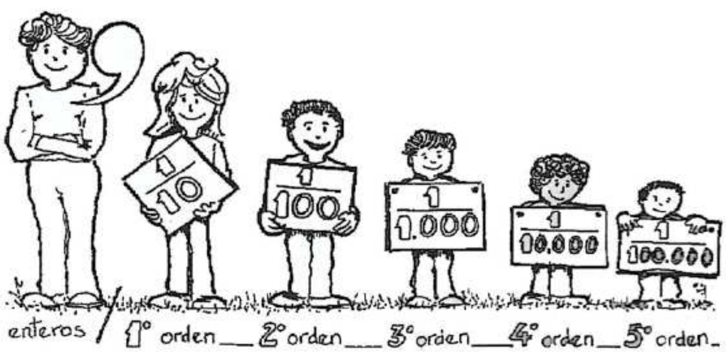
7 , 18

Parte entera — Parte decimal

Las unidades decimales son:

Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas	Cienmilésimas	Millonésimas	…
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	…

1,15 se lee una unidad quince centésimas.
47,053 se lee cuarenta y siete unidades cincuenta y tres milésimas.
0,0008 se lee ocho diezmilésimas.



Al efectuar la división entre el numerador y el denominador de una fracción se obtiene un número decimal:

- Si el numerador es múltiplo del denominador, el número es entero. Por ejemplo:

$$\frac{12}{6} = 12 : 6 = 2 \qquad\qquad \frac{-35}{7} = (-35) : 7 = -5$$

- Si la fracción es equivalente a una fracción cuyo denominador es una potencia de 10, el número es un **decimal exacto** (tiene una cantidad limitada de cifras decimales). Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad \frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 0,24 \qquad \frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 0,45$$

- Si no nos encontramos en alguno de los dos casos anteriores, entonces en el cociente aparecerá un número o grupo de número que se repitan (se trata de un **decimal periódico**). Por ejemplo:

$$\frac{5}{3} = 1,666\ldots \qquad\qquad \frac{1}{9} = 0,1111\ldots$$

$$\frac{4}{15} = 0,466666\ldots \qquad\qquad \frac{25}{24} = 1,0416666\ldots$$

7. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES.

7.1. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS DECIMALES.

* Una carrera, que tiene una longitud total de 36,5 km, se ha dividido en cuatro etapas. Las longitudes de las tres primeras etapas son las siguientes:

Etapa	Longitud (en Km)
1º	6,7
2º	10,25
3º	7,395

¿Cuál es la longitud de la cuarta etapa?

Sumamos las longitudes de las tres primeras etapas:

$$\begin{array}{rr} & 6,700 \\ + & 10,250 \\ & 7,395 \\ \hline & 24,345 \end{array}$$

Restamos a la longitud total, la recorrida en las tres primeras etapas:

$$\begin{array}{rr} & 36,500 \\ - & 24,345 \\ \hline & 12,155 \end{array}$$

La cuarta etapa tiene una longitud de 12, 155 Km.

Para **sumar o restar números decimales** se colocan uno debajo del otro, haciendo coincidir las unidades de cada orden en la misma columna (para lo cual basta con hacer coincidir la coma) y se efectúa la suma o la resta como si se tratase de números enteros, dejando la coma en el lugar correspondiente.

Recuerda que si a la derecha de la parte decimal de un número añadimos uno o varios ceros, el número decimal no varía. Por ejemplo: 25,89 = 25,8900

Asimismo, si la parte decimal acaba en uno o varios ceros, podemos suprimirlos y el número obtenido es equivalente al inicial. Por ejemplo: 2,500 = 2,5

7.2. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES.

* El director de un colegio ha comprado para su centro 14 impresoras iguales a ésta. ¿Cuánto ha de pagar en total?

Tenemos que realizar la multiplicación: 538,92 · 14.

Multiplicamos ambos números como si fueran números naturales:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 5 & 3 & 8, & 9 & 2 \\
\times & & & & 1 & 4 \\
\hline
2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 8 \\
5 & 3 & 8 & 9 & 2 & \\
\hline
7 & 5 & 4 & 4, & 8 & 8
\end{array}
$$

En el producto, separamos con una coma a partir de la derecha, tantas cifras decimales como haya entre los dos factores.

Se pagarán 7544,88 € por las 14 impresoras.

Para **multiplicar números decimales** efectuamos la multiplicación como si fueran números enteros, y en el producto separamos, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales haya entre los factores.

* Carmen ha hecho un pedido de 10 ovillos de lana roja, 100 ovillos de lana verde y 1000 ovillos de lana azul para su mercería. Cada ovillo de lana le cuesta 2,36 €. ¿Cuánto paga por los ovillos de cada color?

2,36 · 10 = 23,60 € paga por los ovillos de lana roja.

2,36 · 100 = 236 € paga por los ovillos de lana verde.

2,36 · 1000= 2360 € paga por los ovillos de lana azul.

Para **multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros** no es necesario realizar la multiplicación; basta con mover la coma decimal hacia la derecha tantos lugares como ceros siguen a la unidad, si hace falta, se añaden ceros.

7.3. DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES.

* Sabemos que un litro de aceite a granel cuesta 3,04 €. ¿Cuántos litros lleva una garrafa que cuesta 18,24 €?

Tenemos que realizar la división 18,24 : 3,04. Para ello la transformaremos en otra que no tenga decimales en el divisor, multiplicando por 100 el dividendo y el divisor.

$$\begin{array}{ccc} & 18,24 : 3,04 & \\ \text{x } 100 & \downarrow & \text{x } 100 \\ & 1824 : 304 & \end{array}$$

Resolvemos la nueva división, que tendrá el mismo resultado que la inicial:

$$\begin{array}{r|l} 1824 & 304 \\ \hline 0000 & 6 \end{array}$$

6 litros de aceite lleva la garrafa.

Para **dividir dos números decimales**, se multiplican ambos números por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor. Así, éste último se transfora en un número entero. A continuación se realiza la división.

* En una oficina han comprado un lote de 10 cuadernos grandes e iguales por 35,12 €; otro de 100 cuadernos medianos e iguales por 281,43 €; y un último lote de 1000 cuadernos pequeños e iguales por 1946,25 €. ¿Cuánto ha costado un cuaderno de cada clase?

35,12 : 10 = 3,512 ≈ 3,51 € cuesta cada cuaderno grande.

281,43 : 100 = 2,8143 ≈ 2,81 € cuesta cada cuaderno mediano.

1946,25 : 1000 = 1,94625 ≈ 1,95 € cuesta cada cuaderno pequeño.

Para **dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros** no es necesario realizar la división; basta con mover la coma decimal hacia la izquierda tantos lugares como ceros siguen a la unidad, si hace falta, se añaden ceros.

8. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES. REDONDEO.

Al efectuar operaciones aparecen con cierta frecuencia números con muchos decimales, pero en bastantes casos no tiene ningún sentido o no es necesario trabajar con todos ellos.

Así, no tiene sentido decir que una persona pesa 53,487 kg, es una precisión innecesaria; además de que no es común una báscula con tanta precisión. Lo mismo sucede si alguien dice que una habitación mide 7,343 m de largo.

Observa también la siguiente situación: Nerea, en diciembre del año 2001, tenía en su hucha 76000 pesetas. En enero tuvo que ir al banco para cambiarlas por euros. ¿Cuántos euros le dieron?

Si efectuamos la división por el cambio oficial, tenemos:

$$76000 : 166{,}386 = 456{,}7692 \text{ €}$$

Pero como sólo existen céntimos de euro, tenemos que redondear esta cantidad para trabajar sólo con dos decimales.

El número de decimales que tomaremos en cada caso viene dado por el contexto en que estemos trabajando.

<u>Regla para redondear cantidades</u>.

Nos fijamos en la primera cifra que queremos suprimir y procedemos de la siguiente forma:

- ✓ Si esta cifra es menor que 5, dejaremos igual la cifra anterior:

$$9{,}73 \rightarrow 9{,}7$$

Queremos suprimir el 3

- ✓ Si esta cifra es igual o mayor que 5, aumentaremos la cifra anterior en una unidad:

$$0{,}15659 \rightarrow 0{,}15$$

La primera cifra que queremos suprimir el 6

Así, en los casos anteriores diremos que:

- El peso de la persona es 53,5 kg; es decir, pesa 53 kilogramos y medio, ya que hemos redondeado 53,487 hasta las décimas.

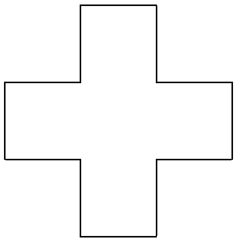
- La longitud de la habitación, si la redondeamos hasta las décimas, es de 7,3 m.

- La cantidad de euros que recibirá Nerea será 456,77, ya que hemos redondeado la cantidad 456,7692 hasta las centésimas.

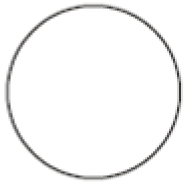
ACTIVIDADES.

1. Representa la fracción que se indica en cada caso:

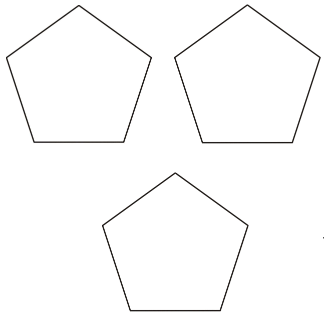
$\frac{6}{15}$



$\frac{2}{5}$

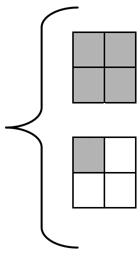


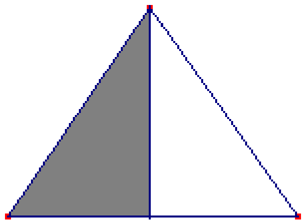
$\frac{5}{8}$

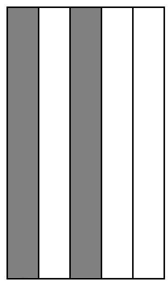


$\frac{15}{6}$

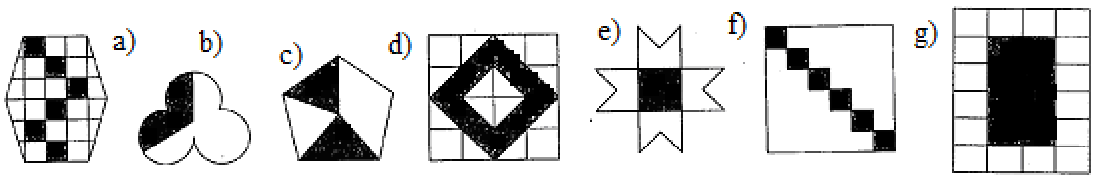
2. Escribe la fracción que corresponde a la superficie coloreada en cada caso.







3. Escribe una fracción que represente la parte rayada en relación con el total, de cada una de las siguientes figuras:



4. Ordena las siguientes fracciones:

a) De menor a mayor: $\frac{6}{7}, \frac{6}{5}, \frac{6}{3}, \frac{6}{11}, \frac{6}{4}$

b) De mayor a menor: $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}$

c) En orden creciente: $\frac{6}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{11}{6}$

5. Ordena de forma decreciente las siguientes fracciones: $\frac{-5}{2}, \frac{3}{4}, 4, \frac{1}{9}, \frac{-1}{7}, \frac{8}{5}, -2$

6. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Obtén las fracciones irreducibles de $\frac{400}{128}$ y $\frac{690}{360}$.

b) Halla la expresión decimal de $\frac{3}{8}$.

c) Encuentra el término que falta: $\frac{17}{18} = \frac{34}{[\ ]}$

d) Halla los $\frac{4}{5}$ de 200.

e) Halla un número sabiendo que sus $\frac{5}{7}$ son 25.

f) En las fracciones siguientes: $\frac{-1}{-3}; \frac{2}{6}; \frac{-3}{9}; \frac{-4}{-12}; \frac{5}{15}$, hay una que no es equivalente a las demás. ¿Cuál es?

g) La fracción de hora que representan 8 minutos es: ____________.

7. Clasifica las fracciones en mayores, menores o iguales que 1:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{9}{3}$ d) $\frac{12}{12}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{7}{4}$

8. Completa:

$a)\ \frac{1}{2} de\ \square = 8$ $b)\ \frac{4}{5} de\ \square = 20$ $c)\ \frac{3}{10} de\ \square = 45$

9. Obtén la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{320}{1600}$ $b)\ \frac{-56}{72}$ $c)\ \frac{125}{60}$ $d)\ -\frac{54}{81}$ $e)\ \frac{175}{180}$

10. Calcula y simplifica el resultado, cuando sea posible:

a) $\frac{7}{6}$ de 96 =

b) $\frac{3}{4} - \frac{11}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} =$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot (-3) =$

d) $\frac{4}{9} : \frac{2}{5} =$

11. Añade el término desconocido en las siguientes igualdades:

$a)\ \frac{3}{13} = \frac{[\ ]}{169}$ $b)\ \frac{[\ ]}{36} = \frac{-2}{9}$ $d)\ \frac{7}{5} = \frac{[\ ]}{40}$

12. Un modelo de Gameboy consume en 14 horas y media $\frac{8}{9}$ de pila y otro modelo consume en 9 horas $\frac{5}{6}$ de pila. ¿Cuál de los dos es más económico?

13. Calcula y simplifica el resultado, cuando sea posible:

a) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}-\frac{3}{7}=$ b) $\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}=$ c) $12:\frac{2}{7}:\frac{4}{5}=$

d) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{7}\right)=$ e) $\frac{2}{7}-3\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{9}\right)+16=$ f) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}:\frac{4}{7}-2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)=$

g) $\frac{7}{10}+3-3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{4}\right)=$ h) $\frac{2}{5}:\left[\frac{3}{5}-2\cdot\left(1-\frac{9}{10}\right)\right]=$

14. Calcula y simplifica el resultado, cuando sea posible:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\right)$

c) $6:\left(2-\frac{4}{5}\right)$

d) $\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\right)$

e) $\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\right):\left(\frac{7}{10}-\frac{3}{4}\right)=$

f) $\frac{1}{2}-\frac{6}{5}:\frac{7}{5}+\frac{4}{3}=$

g) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\right):\left(3-\frac{1}{4}\right)=$

h) $\frac{5}{6}:\left(\frac{2}{3}+1\right)-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)=$

15. En el patio de mi casa tenemos un manzano. Las manzanas estaban maduras y las hemos recogido. Yo recogí $\frac{2}{5}$ de las manzanas, es decir 34. ¿Cuántas manzanas tenía el árbol?

16. De una botella de $\frac{3}{4}$ de litro, se ha consumido las dos quintas partes. ¿Qué fracción de litro queda?

17. Daniel gasta en fotocopias $\frac{1}{5}$ del dinero con el que salió de casa esta mañana. Después emplea en almorzar $\frac{1}{8}$ de lo que le queda. Si regresa a casa con 14 €, ¿cuánto dinero tenía al salir?

18. Un barco carga en Barcelona $\frac{1}{12}$ de la capacidad de sus bodegas, en Valencia, $\frac{1}{6}$, y en Cartagena, $\frac{1}{8}$. ¿Qué parte de la bodega podrá llenar en Cádiz?

19. Una persona ha ahorrado $\frac{1}{3}$ de su sueldo el primer mes, $\frac{3}{4}$ el segundo y al tercer mes no ahorra y tiene un gasto extra de $\frac{4}{5}$. ¿Cuánto tendrá ahorrado?

20. Para ir de mi casa al instituto he de coger dos autobuses. El número 32 me lleva $\frac{7}{15}$ del trayecto. Después cojo el 7 que me transporta $\frac{4}{5}$ de lo que me queda de camino. Si al final tengo que andar 200 metros para llegar al instituto, ¿qué distancia me separa de ella desde mi casa?

21. Si hemos contestado ya a 60 preguntas de un examen tipo test, que representan los $\frac{2}{3}$ del examen, ¿de cuántas preguntas consta el examen?

22. Una familia gasta $\frac{1}{15}$ de su sueldo en el alquiler del piso, $\frac{1}{60}$ de su sueldo en teléfono y electricidad y $\frac{1}{8}$ de su sueldo en transporte y ropa.
    a) ¿Qué fracción del sueldo se gasta la familia en alquiler, teléfono, electricidad, transporte y ropa?

    b) ¿Qué fracción del sueldo le queda para comer y para el ahorro que hace?

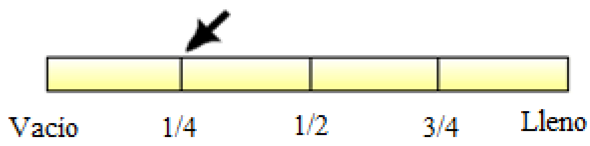
    c) ¿Cómo se distribuyen sus gastos si la familia tiene unos ingresos mensuales de 1200 €?

23. Carmen se ha gastado $\frac{3}{10}$ de su dinero en una revista. Si aún le quedan 21 €, ¿cuánto tenía al principio? ¿Cuánto le costó la revista?

24. Una persona ha comprado mitad de cuarto de gambas y cuarto y mitad de chirlas para una paella ¿Cuánto deberá pagar, sabiendo que 100 gramos de gambas cuestan 3 € y el kilo de chirlas 9 €?

25. Dos quintas partes de los empleados de una empresa trabajan en el turno de noche. La cuarta parte de los del turno de noche pertenecen a la sección de mantenimiento. ¿Qué fracción de los empleados de la empresa trabajan en mantenimiento durante la noche?

26. El indicador de gasolina de un vehículo marca cuánto combustible queda en el depósito.



La capacidad del depósito correspondiente al marcador que aparece en la ilustración es de 60 litros.

a) ¿Cuántos litros le quedan al depósito?

b) Si el conductor echa gasolina por importe de 13,50 €, al precio de 0,90 €/litro, dibuja una flecha que señale hasta dónde subirá, aproximadamente, el marcador.

27. Una familia compró un televisor que pagó en cuatro plazos. La primera vez pagó $\frac{2}{5}$ del precio total, el segundo plazo pagó un tercio del resto, la tercera vez pagó $\frac{5}{7}$ de lo que aún quedaba y el cuarto plazo fue de 24 euros. ¿Cuál era el precio del televisor?

28. Para realizar un problema un alumno empleó $\frac{2}{5}$ del tiempo en leerlo, la tercera parte de lo que queda en plantearlo y le sobró 4 minutos para resolverlo y comprobar el resultado. ¿Qué tiempo tardó en terminar el problema?

29. Se desea distribuir 3950 € entre tres personas, de tal modo que a la segunda corresponda los $\frac{4}{5}$ de lo correspondiente a la primera; y a la tercera los $\frac{5}{6}$ de lo de la segunda. ¿Cuánto corresponde a cada persona?

30. Se adquieren 10 Kg. de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, se reduce en $\frac{1}{5}$ su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción $\frac{1}{4}$ de su peso.¿Cuántos kilogramos de mermelada se obtienen?

31. Borja gastó el sábado la mitad del dinero que le dio su padre para toda la semana. El domingo gastó la tercera parte de lo que le quedaba. Y ya sólo le queda lo justo para el autobús que tiene que coger los restantes días de la semana para ir al instituto (1,30 euros el billete de ida y vuelta). ¿Cuánto dinero le dio esta semana su padre?

32. Una amiga me pidió que le pasase un trabajo a ordenador. El primer día pasé $\frac{1}{4}$ del total del trabajo, el segundo $\frac{1}{3}$ de lo restante; el tercero $\frac{1}{6}$ de lo que faltaba y el cuarto lo concluí, pasando los 30 folios que quedaban. ¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el trabajo?

33. Un jugador pierde la cuarta parte del dinero que lleva y más tarde la mitad de lo que le queda. Suponiendo que se retira del juego, después de estas pérdidas, con 300€, ¿cuánto tenía al principio?

34. Un agricultor dice:

    – Las heladas me estropearon $\frac{3}{10}$ de la cosecha.

    – La sequía me hizo perder otros $\frac{3}{10}$.

    – Luego, una vez recogida, la inundación me ha estropeado $\frac{4}{10}$ de lo que tenía en el almacén.

    – Por lo tanto ($\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{10}{10}$), no me queda nada.

    Un amigo le contesta:

    – No exageres, has salvado casi la cuarta parte de la cosecha.

    ¿Cuál de los dos tiene razón? Justifica la respuesta.

35. Escribe en forma decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{4} =$ b) $\frac{15}{25} =$ c) $\frac{3}{8} =$ d) $\frac{162}{11} =$ e) $\frac{17}{15} =$

36. Escribe mediante redondeo una aproximación de cada uno de los siguientes decimales.

Decimal	2'3458	85'5758	0'008	855'93	0'1005
Aproximación a las centésimas					
Aproximación a las décimas					
Aproximación a las unidades					

37. Calcula los metros que han recorrido cada día un viajante si durante los 5 días laborables de una semana ha realizado 681 Km. y cada día ha recorrido lo mismo. Aproxima el resultado hasta las décimas.

38. La sandía está a 68 céntimos el kilogramo. ¿Cuánto nos costará una sandía que pesa 3kg 750 g?

39. ¿Qué cantidad de queso, a 12,50 €/Kg. podemos comprar con 8 €?

40. Un coche ha recorrido 525 km. El consumo medio de carburante es de 7,3 litros cada 100 km. ¿Cuántos litros de carburante consumió aproximadamente?

41. ¿Cuántas grapas de 2,3 cm de largo se pueden fabricar con un alambre de 200 metros, sabiendo que hay una pérdida de 2 mm de alambre por cada grapa que se fabrica?

42. Redondea las siguientes cantidades a la posición decimal que se indica:

a) 0,2355874112 (cienmilésimas)
b) 12,458877 (milésimas)
c) 7,55699821 (centésimas)
d) 5,441227889 (diezmilésimas)
e) 1,49922 (milésimas)
f) 0,494949 (centésimas)

43. Realizar una llamada local de 3 minutos en horario normal cuesta con un operador de telefonía 0,15 euros y, con otro distinto, 0,09 euros. ¿Cuánto se ahorrará al hablar durante 1000 minutos con la segunda operadora respecto a la primera?

44. María ha comprado 3,5 kilogramos de plátanos a 1,5 euros por kilogramo y varios kilogramos de naranjas a ese mismo precio. Si ha pagado con un billete de 10 euros y le han devuelto 1,75 euros, ¿cuántos kilogramos de naranjas compró?

45. En el mercadillo:

• 5 pares de calcetines valen lo mismo que 3 camisetas.
• 2 camisetas valen como 7 pañuelos.
• 1 pañuelo cuesta 1,8 €.

¿Cuánto vale un par de calcetines?

46. Un comerciante del sector de la confección compra 125 vestidos a 13,20 € cada uno. ¿A qué precio debe ponerlos a la venta, sabiendo que retira cinco unidades para el escaparate y que desea ganar 450 € con la mercancía?

Unidad 2: Proporcionalidad numérica.

En la vida corriente utilizamos el término **proporción** con distintos sentidos: cuando decimos que alguien está bien proporcionado damos a este término un sentido de armonía y estética: "este niño ha crecido mucho, pero está bien proporcionado" Si comentamos que el éxito de una persona es proporcional (o está en proporción) a su trabajo, ponemos de manifiesto la correlación entre estas dos variables: éxito y trabajo. También solemos utilizarlo para comparar fenómenos en distintos ámbitos: "proporcionalmente una hormiga es más fuerte que un elefante”.

La proporcionalidad aparece estrechamente vinculada a nuestra vida cotidiana. ¿Habéis hecho un pastel? ¿Cómo calculáis las cantidades de sus ingredientes en función del número de personas que se lo vayan a comer? Cuando vamos a la compra, ¿cómo calculamos cuánto nos costarán dos kilos y medio de fresas y un kilo y cuarto de kiwis? Si un motorista aumenta la velocidad con que recorre la distancia de una etapa, ¿en qué medida variará el tiempo que tarda en llegar a la meta?

En muchos de los problemas con los que nos encontramos en la vida cotidiana, la proporcionalidad existente entre sus parámetros nos permite resolverlos con la técnica maravillosa de la regla de tres, ya sea directa o inversa. Pero cuidado, algunas veces, es una intuición la que nos dice si podemos o no emplear una regla de tres para resolver un problema. Ante problemas como el siguiente: " Si Colón tardó tres meses en llegar a América con tres carabelas, ¿cuánto habría tardado llevando seis carabelas?” ¿A alguien se le ocurriría emplear una regla de tres para resolver este problema? Demostrar que se puede emplear una regla de tres implica demostrar que existe una relación de proporcionalidad, directa o inversa, entre las dos magnitudes o los dos parámetros que estamos utilizando. Cuando esto es así, la solución del problema es muy sencilla.

A través de la comprensión de los conceptos de magnitud, proporción, razón y constante de proporcionalidad aplicaremos las proporciones y sus métodos de resolución de problemas a situaciones de la vida cotidiana.

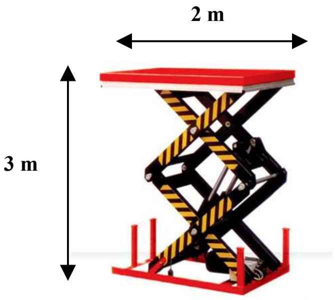
1. RAZÓN Y PROPORCIÓN.

Una **razón** entre dos números es el cociente entre dos números cualesquiera o cantidades que se puedan comparar. Si representamos por a y b dos números cualesquiera, siendo $b \neq 0$, la razón entre ellos es $\frac{a}{b}$.

No hay que confundir **razón** con **fracción**:

- En una razón, los números a y b pueden ser enteros y/o decimales. Por tanto: $\frac{2,5}{3}, \frac{4}{3,5}$ ó $\frac{10}{25}$ son razones (¡pero no son fracciones!).
- En una fracción, los números a y b sólo pueden ser enteros. $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}$ ó $\frac{10}{25}$ son, por lo tanto, fracciones (y también razones).

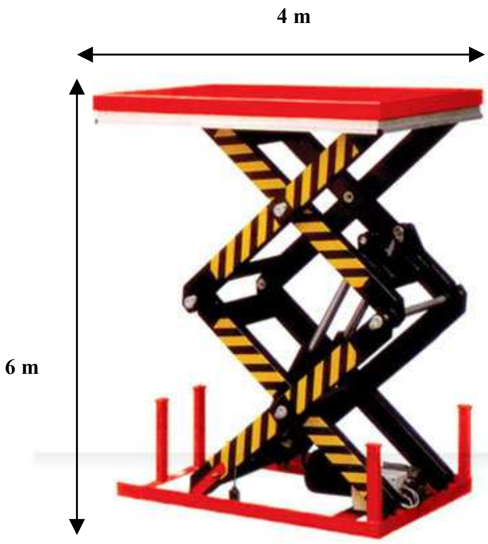
Así pues, la palabra razón es sinónimo de división. Así de simple. ¿Por qué entonces se utiliza en ocasiones la palabra razón en lugar de la palabra división? Porque la razón entre dos números es algo más que una división, nos proporciona una medida de la relación que existe entre ambas cantidades. **La división es simplemente una operación mientras que la razón expresa una relación**.



Imaginemos una plataforma elevadora de 3 metros de alto que soporta una plataforma horizontal de 2 metros de largo.

De este modo, la razón entre la longitud horizontal y la vertical es $\frac{2}{3}$.

Consideremos otra plataforma elevadora más grande, con las medidas que se indican en el dibujo.



Esta nueva plataforma elevadora es más grande, sin embargo, la longitud vertical del elevador y la horizontal de la plataforma, guardan la misma razón que en la plataforma pequeña:

$$\frac{2}{3} = 0,6666...$$

$$\frac{4}{6} = 0,6666...$$

De manera que, más que una división entre las dos longitudes, la razón nos está indicando un cierto patrón de cómo construir plataformas similares a la pequeña.

A la igualdad entre dos o más razones se le llama **proporción.** Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde a, b, c y d representan cuatro números cualesquiera con $b \neq 0$ y $d \neq 0$) y se lee *"a es a b como c es a d"*.

El cociente de todas las razones que forman una proporción es el mismo. Se suele representar con la letra ***k*** y se llama **constante de proporcionalidad.**

Los términos *a* y *d* se denominan **extremos**. Los términos *c* y *d* se denominan **medios**. Los términos *a* y *c* se denominan **antecedentes**. Los términos *b* y *d* se denominan **consecuentes**.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=0,6\rightarrow\begin{cases}k=0,6\rightarrow Constante\ \ de\ \ proporcionalidad.\\ 3\ \ y\ \ 20\rightarrow Extremos.\\ 5\ \ y\ \ 12\rightarrow Medios.\\ 3\ \ y\ \ 12\rightarrow Antecedentes.\\ 5\ \ y\ \ 20\rightarrow Consecuentes.\end{cases}$$

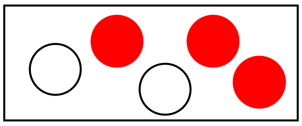
PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES.

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Dicho de otro modo, los productos cruzados son iguales.

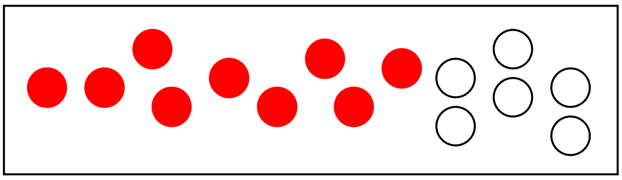
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Por ejemplo: $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}\rightarrow\begin{cases}4\cdot 10=40\\ 8\cdot 5=40\end{cases}$

Supongamos que tenemos una urna con dos bolitas blancas y tres rojas.



Queremos mantener la misma proporción entre las bolas rojas y las blancas pero queremos que haya nueve bolitas rojas, ¿cuántas bolitas blancas deberemos poner?



$\frac{2}{3}=\frac{x}{9}\Leftrightarrow x=\frac{9\cdot 2}{3}=6$ bolitas blancas.

OBTENCIÓN DE TÉRMINOS PROPORCIONALES: Si en una proporción conocemos tres de sus cuatro términos, para hallar el valor del cuarto término, el **cuarto proporcional,** utilizamos la propiedad fundamental de las proporciones.

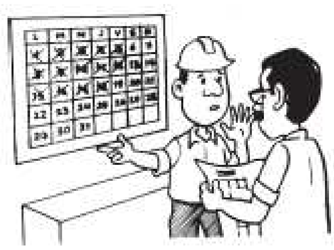
$$\frac{3}{4}=\frac{9}{x}\Rightarrow 3\cdot x=9\cdot 4\Rightarrow 3x=36\Rightarrow x=\frac{36}{3}\Rightarrow x=12\text{. Luego: }\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$$

2. MAGNITUDES DIRECTA E INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Recordemos que una **magnitud** es cualquier característica de un objeto que podemos medir. Son magnitudes: la longitud, la superficie, el volumen, la masa, la capacidad, el precio...No son magnitudes: la bondad, la maldad, la belleza, el compañerismo, el color de pelo…

A veces dos magnitudes pueden estar relacionadas. Por ejemplo: el número de personas que van al cine a ver una película y la longitud de la cola que se forma en la taquilla para sacar las entradas. Cuando una cosa depende de otra decimos que están relacionadas. El número de personas que hay en la cola y el número de coches que pasan por la calle no están relacionadas, no depende una cosa de la otra. Estas magnitudes se dice que son independientes.

Cuando dos magnitudes están relacionadas pueden hacerlo mediante una relación de proporcionalidad o no. Por ejemplo la edad de una persona y la talla de ropa que usa, están relacionadas pero no son proporcionales, lo mismo ocurre con la cantidad de abono que ponemos en la tierra y la cosecha obtenida.



El número de obreros que realizan un trabajo y los días que tardan en realizarlo o el peso de la fruta que compramos en el mercado y la cantidad de dinero que pagamos por ella son magnitudes que están relacionadas por una relación de proporcionalidad.

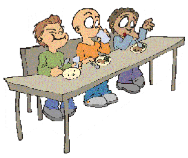
Existirá una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes cuando haya un operador de multiplicar o de dividir que permita pasar de una a otra.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número, o lo que es lo mismo, su cociente es constante.

Consideremos A y B dos magnitudes cuyos valores vienen indicados en la siguiente tabla:

Magnitud A	a	b	c	d	...	n
Magnitud B	a´	b´	c´	d´	...	n´

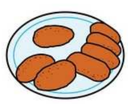
Si al formar una proporción con los valores de ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma, las magnitudes A y B son directamente proporcionales. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=...=\frac{n}{n'}=k$



En un comedor escolar cada alumno se come 2 croquetas. Dos alumnos comen 4 croquetas; 3 alumnos, 6 croquetas; 4 alumnos, 8 croquetas... ¿Cuántas croquetas comen 9 alumnos? ¿Y 15? La relación entre las magnitudes a veces se expresa mediante una tabla llamada **tabla de proporcionalidad**.

Número de alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Número de croquetas	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

Las magnitudes número de alumnos y número croquetas, son directamente proporcionales entre porque al multiplicar el número de alumnos por 2, el número de croquetas también queda multiplicado por dos.



Al formar las proporciones con ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=...=\frac{14}{28}=\frac{15}{30}=0,5$

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir uno de los valores de una de las magnitudes por un número, el valor de la otra queda dividido o multiplicado, respectivamente, por ese mismo número, o lo que es lo mismo, su producto es constante.

Consideremos A y B dos magnitudes cuyos valores vienen indicados en la siguiente tabla:

Magnitud A	a	b	c	d	...	n
Magnitud B	a´	b´	c´	d´	...	n´

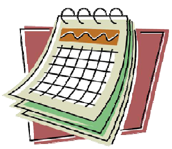
Para formar proporciones entre dos magnitudes inversamente proporcionales, se toma la razón de dos cantidades de una magnitud y la razón inversa de las cantidades correspondientes de la otra magnitud.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{b'}{a'}\\ \frac{b}{c}=\frac{c'}{b'}\\ \frac{c}{d}=\frac{d'}{c'}\end{array}\right\}\rightarrow a\cdot a'=b\cdot b'=c\cdot c'=d\cdot d'$$

Por ejemplo: para pintar una casa un pintor tarda 48 días; 3 pintores tardan 16 días; 12 pintores, 4 días; 24 pintores tardarían en pintarla 2 días, y 48 pintores emplearían 1 día. Las magnitudes son el número de pintores y los días empleados. Formamos una tabla de valores:

Pintores	1	3	12	24	...	a · k
Días	48	16	4	2	...	b : k

Al multiplicar el número de pintores por un cierto número, el número de días empleado queda dividido por él. Observamos que en las razones de las proporciones se invierte el orden de los valores:



$$\frac{1}{3}=\frac{16}{48}\Rightarrow 1\cdot 48=3\cdot 16$$

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}\Rightarrow 3\cdot 16=12\cdot 4$$

3. REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA E INVERSA.

La regla de tres es un procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad entre tres o más valores conocidos y una incógnita. La **regla de tres simple directa** se aplica cuando dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes directamente proporcionales, hay que calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud. La **regla de tres simple inversa** se aplica cuando dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes inversamente proporcionales, hay que calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA:

Para hallar una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes directamente proporcionales, planteamos una regla de tres simple directa.

La regla de tres simple directa equivale a calcular el cuarto proporcional en una proporción.

Magnitud A		Magnitud B
a	———————	b
c	———————	d

$$\rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo: Un coche gasta 5 litros de gasolina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el coche?

Las magnitudes "volumen de gasolina" y "distancia recorrida" son directamente proporcionales, puesto que a mayor cantidad de litros de gasolina en el depósito, mayor distancia podrá recorrer.

Volumen de gasolina (en litros)		Distancia
5 litros	———————	100 km
6 litros	———————	x km

$$\frac{5}{6}=\frac{100}{x} \Leftrightarrow x=\frac{6\cdot 100}{5}=120 \text{ km}$$ podrá recorrer el coche.

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA:

Para conocer una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales, planteamos una regla de tres simple inversa.

Magnitud A		Magnitud B
a	———————	b
c	———————	d

$$\rightarrow \frac{a}{c}=\frac{d}{b} \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$$

Ejemplo: Un barco que navega a 24 km/h ha tardado en hacer un recorrido 12 horas. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido otro barco que navega a 32 km/h?

Las magnitudes "velocidad" y "tiempo" son, en este caso, inversamente proporcionales, puesto que a mayor velocidad, menor será el tiempo empleado en hacer el recorrido.

Velocidad (en km/h)		Tiempo (en horas)
24 km/h	______________	12 horas
32 km/h	______________	x horas.

$\frac{24}{32} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 24}{32} = \frac{288}{32} = 9$ horas tardará el otro barco en hacer el mismo recorrido.

4. CÁLCULO DE PORCENTAJES. AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

Es muy habitual oír a nuestro alrededor expresiones como las siguientes:

- Me compré una camisa que estaba rebajada un 15 %.
- La mejor audiencia de la noche del martes fue del 24,5 %.
- Hay que sumarle el 16 % de IVA.
- El riesgo de precipitaciones para el domingo es del 46 %.

Todas estas expresiones tienen algo en común: **los porcentajes**. Vamos a conocer qué es un porcentaje y cómo se realizan cálculos elementales con ellos.

Un **porcentaje** es una fracción de denominador 100. Como recordarás, en una fracción, el denominador nos señala las partes en las que dividimos la unidad y el numerador las partes que cogemos. En el caso de un porcentaje, el denominador siempre es 100, de manera que cuando hablamos, por ejemplo, del 25 %, estamos refiriéndonos a $\frac{25}{100}$.

Además, hay que entender que con un porcentaje expresamos una proporción. Si decimos que en una clase ha aprobado el 75 % de los alumnos no estamos diciendo que hay 100 alumnos de los cuales han aprobado 75, sino que esa es la proporción de aprobados: si hubiese 100 alumnos habrían aprobado 75. Si por ejemplo estamos hablando de una clase de 24 alumnos, habrían aprobado 18 alumnos ya que: $\frac{75}{100} = \frac{18}{24}$

Los porcentajes, al ser fracciones, también pueden expresarse en forma de número decimal. Para calcularlos bastará entonces con multiplicar la cantidad total por el número decimal asociado al porcentaje. Por ejemplo: 45 % de 1.200 = 0,45 · 1.200 = 540 que es lo mismo que hacer 45 % de 1.200 = $\frac{45 \cdot 1200}{100} = \frac{54000}{100} = 540$.

De la misma forma, si queremos calcular qué porcentaje supone una determinada cantidad respecto de un total, bastará con multiplicar esa cantidad por 100 y luego dividir entre el total.

Por ejemplo: queremos saber que porcentaje representan 57 alumnos de un total de 380: $\frac{57}{380} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{57 \cdot 100}{380} = \frac{5700}{380} = 15\%$.

Finalmente, si conocemos el porcentaje que una determinada cantidad representa sobre el total pero éste nos es desconocido, podemos calcularlo multiplicando dicha cantidad por 100 y dividiendo por el porcentaje dado.

Por ejemplo: sabemos que en una clase el número de chicas representa el 40% del total de alumnos. Si hay 12 chicas, veamos cómo calcular el número total de alumnos: $\frac{40}{100}=\frac{12}{x}\Leftrightarrow x=\frac{12\cdot 100}{40}=\frac{1200}{40}=30$ alumnos.

Podemos interpretar el cálculo de porcentajes como problemas de proporcionalidad directa y como tales pueden calcularse por medio de una regla de tres. Como ejemplo vamos a calcular el 40% de 650:

Total		Parte
100	————	40
650	————	x

$$\frac{100}{650}=\frac{40}{x}\Leftrightarrow x=\frac{650\cdot 40}{100}=\frac{26000}{100}=260.$$

Esta forma de resolver porcentajes resulta muy útil en algunos tipos de problemas.

Otra aplicación muy útil de los porcentajes son los **aumentos y disminuciones porcentuales**. Observa los siguientes ejemplos:

- Un ordenador costaba 850 € y se le aplica una rebaja del 30 %. ¿Cuánto cuesta ahora?

Podemos resolver este problema de dos maneras diferentes:

Opción 1: Calculamos la cantidad de dinero que descuentan y luego restamos esta cantidad del total.

30% de 850 = 0,3 · 850 = 255 € rebajan el precio del ordenador.

Precio tras la rebaja: 850 – 255 = 595 € es el precio del nuevo ordenador.

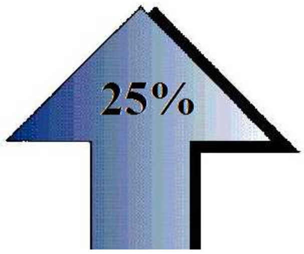
Opción 2: Calculamos el porcentaje que debemos pagar del total y de esta forma obtenemos directamente la cantidad de dinero que tenemos que pagar.

Como han rebajado el ordenador un 30%, ahora debemos pagar el 70% (100 – 30 = 70). Lo calculamos:

70% de 850 = 0,7 · 850 = 595 € es el nuevo precio del ordenador.

• El número de suspensos de una clase, que era 8, se ha incrementado en un 25 %. ¿Cuántos suspensos hay ahora?

Como en el caso anterior, podemos resolver este problema de dos maneras diferentes:



Opción 1: Calculamos el incremento del número de suspensos.

25% de 8 = 0,25 · 8 = 2 es el incremento en el número de suspensos.

Número de suspensos actual: 8 + 2 = 10 suspensos hay ahora.

Opción 2: Calculamos el porcentaje sobre el total que representa el número de suspensos tras el incremento y de esta forma obtenemos directamente el número de suspensos que hay ahora.

Si se ha incrementado un 25%, los suspens os ahora son el 125% del total (100 + 25 = 125). Lo calculamos:

125% de 8 = 1,25 · 8 = 10 suspensos hay ahora.

ACTIVIDADES.

1. Completa las siguientes tablas de magnitudes directamente proporcionales. Calcula en cada caso, la constante de proporcionalidad.

Magnitud 1	6	12		9	
Magnitud 2	30		150		15

Magnitud 1	8	2		11,2	
Magnitud 2	10		30		12,5

Magnitud 1	12		1,5		0,5
Magnitud 2		6	60	30	

2. En el primer día de una campaña de donación se consiguen 28000 ml de sangre gracias a la colaboración de 70 personas. Contesta las siguientes preguntas:

   a) Si el segundo día colaboran 85 donantes, ¿cuánta sangre se conseguirá reunir?
   b) Si el tercer día se consiguen 22000 ml de sangre, ¿cuántas personas han colaborado?
   c) Calcula la constante de proporcionalidad de esta relación. ¿Qué significado tiene?

3. Una empresa de reparto de mercancías entrega cada día 48000 kg de alimentos utilizando sus 4 camiones.

a) El número de camiones y los kilogramos de comida, ¿son directamente proporcionales?
b) ¿Cuántos kilogramos podrán repartir si se avería uno de los camiones y sólo pueden utilizar tres?
c) Si en la empresa deciden comprar dos camiones más, ¿cuántos kilogramos de comida podrían repartir?
d) Si quieren ampliar su capacidad de reparto a 120000 kg, ¿cuántos camiones necesitarán?
e) Calcula la constante de proporcionalidad de esta relación. ¿Qué significado tiene?

4. A Javier y a Celia les han regalado dos reproductores de mp3. Celia almacena 240 canciones que ocupan un total de 750 Mb.

a) ¿Cuántas canciones podrá guardar Javier si utiliza los 2 Gb de que dispone su reproductor?
b) Calcula la constante de proporcionalidad de esta relación.
c) ¿Qué significado tiene esta constante?

5. Calcula el término desconocido en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{12}=\frac{5}{x}$ b) $\frac{x}{24}=\frac{3}{72}$ c) $\frac{3}{x}=\frac{15}{70}$ d) $\frac{15}{40}=\frac{x}{16}$ e) $\frac{3,5}{x}=\frac{2}{4}$

6. Dí cuales de estas parejas de fracciones forman una proporción y cuales no.

a) $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ b) $\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$ c) $\frac{4}{5}=\frac{4}{10}$ d) $\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$

7. Elige entre las siguientes fracciones aquellas que formen proporción con $\frac{2}{5}$.

$\frac{6}{14}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{12}{28}$ $\frac{16}{40}$ $\frac{54}{135}$

8. Completa las siguientes tablas de magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitud 1	8		4	16	
Magnitud 2	5	10			20

Magnitud 1	12	24		2,4	
Magnitud 2	10		30		2,5

Magnitud 1		7	3,5	0,5	
Magnitud 2	15		30		7,5

9. Determina cuáles de estas magnitudes son proporcionales. De las proporcionales distingue las que sean directamente proporcionales de las inversamente proporcionales:

   a) El número de litros de agua y el número de botellas iguales que los contienen.
   b) La cantidad de alimentos que come una persona y su peso.
   c) El número de libros que caben en una estantería y el grosor de éstos.
   d) El número de sandías (iguales) que hay en un camión y el peso de éste.
   e) El peso de una persona y la distancia que es capaz de andar en un día.
   f) La velocidad que corre una moto y el tiempo que tarda en recorrer 100 Km.
   g) El número de operarios y el número de paraguas que hacen en un día.
   h) El número de operarios y el tiempo que utilizan para hacer 50 paraguas.
   i) La edad de una persona y su altura.
   j) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.
   k) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.
   l) El tiempo que se camina a velocidad constante y la distancia recorrida.
   m) La talla de un pantalón y su precio.
   n) El tiempo de estudio y la nota que obtenida en un examen.
   o) El ancho de una estantería y los libros (del mismo tipo) que se pueden colocar en ella.
   p) La capacidad de un depósito de gasolina y el tiempo que necesitamos para llenarlo utilizando el mismo surtidor.
   q) Los megabytes de una tarjeta de memoria y las fotos que se pueden almacenar en ella.
   r) Las personas que montan en un ascensor y la velocidad a la que este asciende.
   s) Las personas que levantan un objeto y la fuerza que debe hacer cada una de ellas.
   t) La velocidad a la que se mueve un coche y la cantidad de combustible que consume.

10. Un proyecto de ayuda a países subdesarrollados se ha financiado gracias a la colaboración de 5000 personas. El promedio de la cantidad que ha aportado cada una de estas personas ha sido de 140 €.

    a) Si hubiesen colaborado 7500 personas, ¿cuánto dinero tendría que aportar cada una de promedio para desarrollar el mismo proyecto?
    b) Si el promedio de la aportación personal para el mismo proyecto fuese de 350 €, ¿cuántas personas habrían colaborado?
    c) Calcula la constante de proporcionalidad de esta relación. ¿Qué significado tiene?

11. Tres hermanos han recibido 960 € de su abuelo. Éste les ha dicho que se han de repartir el dinero proporcionalmente a sus edades que son: 7, 9 y 14 años. Averigua cuánto le toca a cada uno.

12. Mientras el capitán del barco acababa de calcular que siendo 240 tripulantes tendrán alimentos para 40 días avistan una lancha con 60 náufragos, a los que, por supuesto recogen. ¿Para cuántos días tendrán comida todos?

13. Si 180 termitas precisaron 12 horas para hacer desaparecer una puerta de madera, ¿cuántas termitas harían desaparecer la misma puerta en cuatro horas?

14. Tres amigos han hecho una quiniela. El primero ha aportado 5 €; el segundo 6 € y el tercero 9 €. Si les toca un premio de 5400 €, ¿cómo se lo deben repartir?

15. Un tren lleva una velocidad de 80 km por hora y tarda 6 horas en hacer el trayecto entre dos ciudades. ¿Cuánto tiempo tardaría si la velocidad fuera de 120 km por hora?

16. En un concurso de "triples" de Baloncesto hay un premio de 280 € para los tres que más encesten tirando diez veces cada uno. Mireia con 5 aciertos, Joan con 7 y Marta con 8 han sido los tres ganadores. ¿Cómo tienen que repartirse el premio para que sea proporcional a los aciertos?

17. Un corredor de maratón lleva recorridos 15 km en 45 minutos. Si continúa corriendo a la misma velocidad, ¿cuánto tardará en recorrer 6 km más?

18. Con 200 kilogramos de harina se elaboran 250 kilogramos de pan.

    a) ¿Cuántos Kg. de harina se necesitan para hacer un pan de 2 Kg?
    b) ¿Cuántos panecillos de 150 gramos se podrán hacer con 500 Kg. de harina?

19. Diez hombres hacen una obra en 45 días. ¿Cuántos hombres se necesitarán para hacerla en 15 días?

20. Doce camiones cisterna llenan un depósito en siete horas, ¿cuánto tiempo hubieran tardado en llenarlo entre tres camiones?

21. Juan y Carmela dejan sus coches en un aparcamiento a las 8 de la mañana. Juan lo retira a las 12 h. y paga 3,40 €. ¿Cuánto pagará Carmela si lo recoge a las 17 h.?

22. Calcula los siguientes porcentajes:

    a) El 10% de 360.
    b) El 12% de 5.
    c) El 1,5% de 70.
    d) El 125% de 24.

23. Describe las siguientes situaciones utilizando porcentajes:

    a) En una clase de 24 alumnos, 6 de ellos han suspendido Matemáticas.
    b) En una ciudad de 180000 habitantes, 9.000 personas no reciclan correctamente la basura.
    c) En un edificio de 60 viviendas, 15 están deshabitadas.
    d) En una empresa en la que trabajan 2600 empleados, 923 tienen menos de 35 años.
    e) David ha sido el autor de 12 de los 50 goles que ha marcado su equipo de fútbol esta temporada.
    f) Alicia ha gastado 26,65 € de los 130 que tenía ahorrados.

24. Rubén ha ganado el 75% de los 12 partidos de ping-pong que ha jugado en un campeonato de su instituto. ¿Cuántos partidos ha perdido?

25. Completa:

a) El 20% de _________ es 4.
b) El 70% de _______ es 280.
c) El _______% de 300 es 45.
d) El ______% de 200 es 160.

26. Responde a las siguientes cuestiones:

a) El 10% de los empleados de una empresa está de vacaciones, ¿qué porcentaje está trabajando?
b) Si al comprar un jersey me rebajan el 15%, ¿qué porcentaje pago?
c) El 92% de los alumnos ha aprobado un examen, ¿cuál es el porcentaje de suspensos?

27. Este mes ha habido en mi comunidad autónoma 120 accidentes de tráfico, lo que mejora la cifra del año pasado que fue de 160 accidentes. ¿En qué tanto por ciento han disminuido este tipo de accidentes?

28. En un teatro de 540 localidades se han vendido el 65% de las entradas para la sesión de noche. Si cada entrada cuesta 25 €, ¿cuál ha sido la recaudación de la noche?

29. Jesús ha conseguido incrementar su nota media en un 15%. Si su nota media era 6,3, ¿cuál es su nota actual?

30. En un concesionario de coches ofrecen un determinado modelo con una rebaja del 10 %. El precio de ese automóvil es de 17.000 € + IVA.

a) Calcula primero el precio del coche sin rebaja cuando le sumamos el IVA (16 %).
b) Si a ese precio le aplicamos ahora la rebaja del 10 %, ¿cuánto cuesta finalmente el vehículo?
c) Repite el cálculo pero ahora aplica primero la rebaja y añade a ese precio rebajado el 16 % de IVA. ¿Ha influido el orden en el resultado?

31. Los peces de colores de la colección que tenía Juan contrajeron una enfermedad. El 70% de ellos murió. Si sobrevivieron 60, ¿cuántos peces tenía Juan?

32. En una tienda de informática, el 40% de los ordenadores que se vendieron el último mes eran portátiles. De estos, el 15% se ofertaban con una impresora de regalo. Sabiendo que en total se vendieron 250 ordenadores, ¿cuántas impresoras se regalaron ese mes?

33. Calcula el resultado de los siguientes aumentos y disminuciones:

a) El número de suspensos en Ámbito Científico-Tecnológico, que en el curso pasado fue de 8 alumnos, ha disminuido en un 25 %. ¿Cuántos alumnos han suspendido esta evaluación?
b) En un folleto de publicidad, el precio de un ordenador es de 700 € + IVA. ¿Cuál es el precio real?
c) Una camisa que cuesta 20 € ahora se encuentra rebajada en un 20 %. ¿Cuál es su precio actual?
d) A Patricia le suben el sueldo un 15 %. Si antes cobraba 1.200 €, ¿cuánto cobra ahora?

34. Unos pantalones vaqueros se venden por 43 euros. Así se consigue un beneficio del 25% sobre su precio de coste. ¿Cuál es el precio de coste?

35. Tres amigos se sientan en la mesa de un bar y toman un café, un té y un refresco por valor de 3 €. Al día siguiente toman lo mismo, pero esta vez en la barra, por un valor de 2,70 €. ¿Qué porcentaje se incrementa el precio de las consumiciones en las mesas con respecto a las de la barra del bar?

36. Las manzanas en el último mes han bajado un 10%. Calcula:

    a) El precio de este mes de un saco de manzanas si el mes pasado costaba 10 €.

    b) El precio de 1 kg en el mes anterior si ahora cuesta 1,35 €.

37. Se han pagado 45 € por una entrada para un partido adquirida en la reventa. Si el revendedor ha ganado un 80% de lo que le costó la entrada, ¿cuánto costaba la entrada en taquilla?

38. Durante un Gran Premio de Fórmula I los neumáticos de los coches pierden por desgaste con el asfalto un 3% de su peso. Si las cuatro ruedas de un coche pesan 388 kg al final de la carrera, ¿cuánto pesaban antes de empezar la misma?

39. Anuncian un descuento del 30% en todos los artículos de ropa, que se marcará en el etiquetado junto al precio antiguo.

    a) Una camisa costaba 30 €. Calcula el nuevo precio, en euros, que debe marcar.

    b) Un pantalón marca 28 € como precio rebajado. ¿Cuál es el precio antiguo, en euros, que debe mostrar?

40. Un comerciante poco honesto, antes de anunciar unas “rebajas del 25%” aumenta el 25% el precio de referencia de los artículos. ¿Cuál es el precio actual de un televisor que costaba 480€? ¿Qué porcentaje se ha descontado realmente?

41. Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba 90 €. Cuando llegué a la tienda, este tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él? En la misma tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella 9,75 €. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

42. En un periodo de 6 meses, una colonia de conejos incrementa su número en un 25% y, más tarde, en un 30%. Si había al principio 200 conejos en la colonia, ¿cuántos hay después de 6 meses?

43. En un tienda hemos comprado un televisor de 110 € , pero nos han hecho un descuento del 20% , también le tenemos que añadir el IVA del 16% , por último debemos de pagar el 8% para que nos lo traigan hasta casa.¿ Cuánto tenemos que pagar al final por el televisor ?

44. Observa esta oferta que con frecuencia suelen ofrecer los centros comerciales:

¿Qué porcentaje de rebaja se consigue aprovechando este tipo de ofertas?

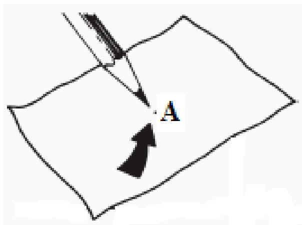
Unidad 3: Elementos básicos de Geometría plana.

1. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA PLANA.

La Geometría es una parte de la matemática que trata de estudiar unas idealizaciones del espacio en que vivimos, que son los puntos, las rectas y los planos, y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros.

En su forma más elemental, la Geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área, y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea. El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Muchos objetos de uso cotidiano por nosotros se dibujan a partir de figuras geométricas.

Los elementos básicos de la geometría plana son el plano, la recta y el punto. Pero definirlos es muy complicado si se quiere hacer de forma rigurosa. Trataremos de tener una idea intuitiva de todos ellos que nos permita distinguirlos bien.



- La marca hecha con un lápiz bien afilado sobre la superficie de un papel nos da una idea de punto. El **punto** geométrico no tiene dimensiones (no podemos dar su longitud, su altura ni su anchura). Señala una posición en el plano. Se nombra con letras mayúsculas: A, B, C…

- La **recta** tiene una sola dimensión, la longitud, y está formada por infinitos puntos. Las nombramos con letras minúsculas: r, s, t… Cuando intentamos representar gráficamente una recta sólo podemos representar una parte.

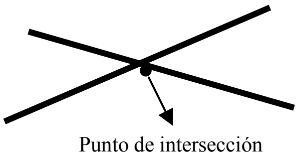
Dos puntos cualesquiera del plano determinan una única recta que pasa por ellos.

Los puntos que se encuentran contenidos en una misma recta se dice que están **alineados.**

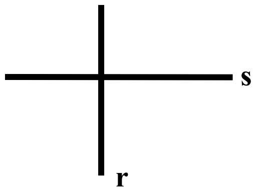
- El **plano** tiene dos dimensiones, longitud y anchura y, como en el caso de la recta, no tiene límites. Cuando intentamos representar gráficamente un plano sólo podemos representar una parte.

Dos rectas en el plano sólo pueden tener tres posiciones:

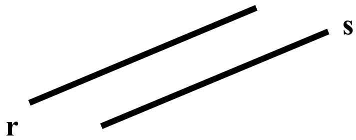
- Si tienen un punto en común son **secantes.** El único punto en común se llama **punto de intersección** y pertenece a las dos rectas.



Dos rectas secantes dividen al plano en cuatro regiones. Un caso particular son las **rectas perpendiculares** que dividen al plano en cuatro regiones iguales.



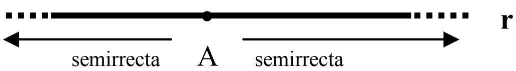
- Si las rectas no tienen ningún punto en común se llaman **paralelas**.



- Dos rectas son **coincidentes** si tienen todos sus puntos en común.

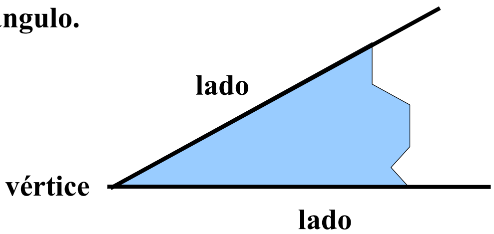
A partir de los elementos básicos de la geometría plana se obtienen otros:

- Un punto, A, cualquiera de una recta determina en ella dos **semirrectas**. Cada semirrecta tiene principio (el punto A) pero no fin. El punto A se denomina **origen de la semirrecta.**



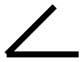
- Dos puntos, A y B, de una recta determinan un **segmento.** De todos los elementos que hemos tratado hasta ahora, el segmento es el único que podemos medir. Los puntos A y B se denominan **extremos del segmento.**

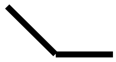
- Un **ángulo** es la porción del plano limitada por dos semirrectas con el mismo origen. Las semirrectas son los **lados del ángulo** y el origen común es el **vértice del ángulo.**

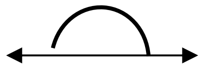


Para medir ángulos se utiliza el sistema sexagesimal, cuya unidad es el **grado.** Los ángulos pueden clasificarse según su medida:

- **Recto**: cuando los dos lados son perpendiculares. Su medida es 90º. 

- **Agudo**: la abertura de los lados es menor que un ángulo recto. Mide menos de 90º 

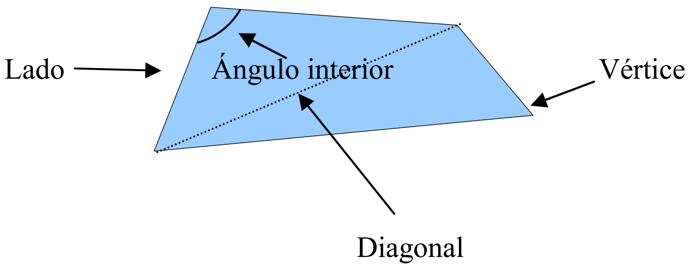
- **Obtuso**: la abertura de los lados es mayor que un ángulo recto. Mide más de 90º. 

- **Llano:** sus lados se encuentran contenidos en la misma recta. Mide 180º. 

2. FIGURAS PLANAS.

Un **polígono** es la región del plano limitada por segmentos. Cada uno de los segmentos que determinan el polígono se denomina **lado** del polígono. Los vértices son los puntos en que se unen dos lados consecutivos. En todo polígono el número de lados y el de vértices coinciden.

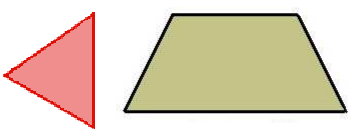
Las **diagonales** de un polígono son los segmentos que unen vértices no consecutivos. Los **ángulos interiores** de un polígono son los ángulos formados por cada par de lados consecutivos.



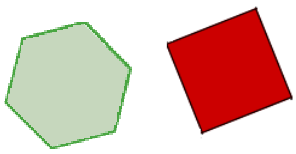
Una porción del plano se puede cerrar si tenemos como mínimo tres segmentos. Ése es el polígono con menor número de lados.

Podemos hacer diversas clasificaciones de los polígonos según el criterio que tengamos en cuenta. Por ejemplo:

- Un **polígono** se dice que es **regular** cuando tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales. En caso contrario se dice que el **polígono** es **irregular.**

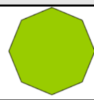
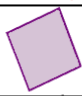
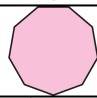
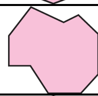
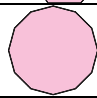
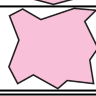


Polígonos irregulares

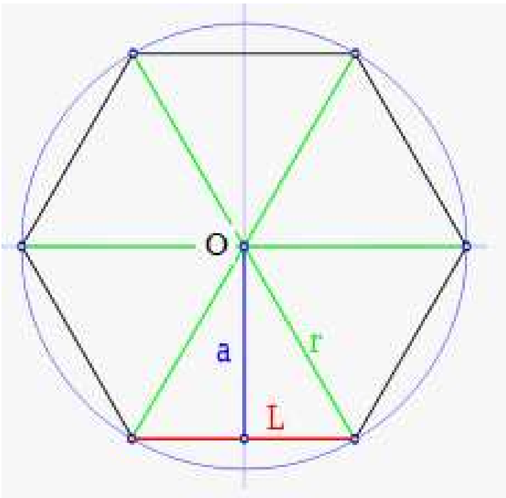


Polígonos regulares

- Otra forma de clasificar los polígonos es según el número de lados que tienen. Veamos cómo se denominan algunos de ellos:

NÚMERO DE LADOS	NOMBRE	FIGURA	NÚMERO DE LADOS	NOMBRE	FIGURA
3	Triángulo		8	Octógono	
4	Cuadrilátero		9	Eneágono	
5	Pentágono		10	Decágono	
6	Hexágono		11	Endecágono	
7	Heptágono		12	Dodecágono	

ELEMENTOS DE UN POLÍGONO REGULAR

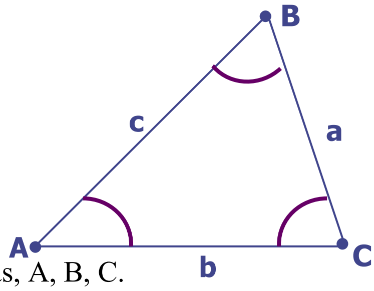


A los elementos anteriormente mencionados que podemos encontrar en cualquier polígono, vértices, lados, diagonales y ángulos, en el caso de los polígonos regulares, aparecen tres nuevos elementos: el **centro** (O), que es un punto que se encuentra a la misma distancia de todos los vértices del polígono, el **radio** (r), que es el segmento que une el centro con el vértice, y la **apotema** (a), segmento que une el centro con el punto medio de un lado. L representa en el dibujo el lado del polígono.

2.1. TRIÁNGULOS.

Un triángulo es un polígono de tres lados.

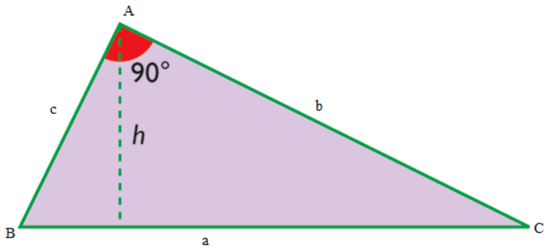
En un triángulo podemos distinguir:

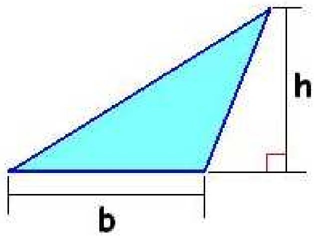


- Sus tres vértices: se denotan con letras mayúsculas, A, B, C.
- Sus tres lados: se denotan con la misma letra que el vértice opuesto pero en minúscula: a, b y c.
- Sus tres ángulos: se denotan con la misma letra que el vértice correspondiente, A, B, C.

LA SUMA DE LOS TRES ÁNGULOS INTERIORES DE CUALQUIER TRIÁNGULO ES SIEMPRE 180º.

Cada uno de los lados del triángulo es también **base** del triángulo. A cada base del triángulo le corresponde una **altura** (h), rectas perpendiculares que van desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



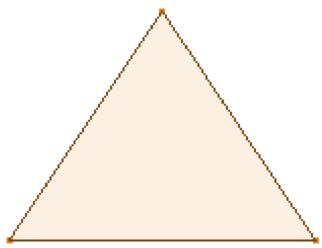


LA BASE DE UN TRIÁNGULO Y SU ALTURA CORRESPONDIENTE SIEMPRE SON PERPENDICULARES Y, SIN EMBARGO, NO TIENEN POR QUÉ CORTARSE.

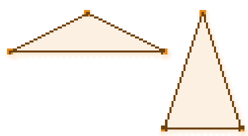
<u>CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS</u>

Podemos clasificar los triángulos según sus lados y según sus ángulos:

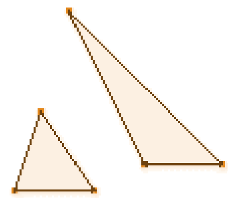
- <u>**SEGÚN SUS LADOS**</u>:
  - **Equiláteros:** tienen los tres lados de la misma longitud.
  - **Isósceles:** tienen dos lados de igual longitud y el tercero de distinta longitud que estos dos.
  - **Escaleno:** tiene los tres lados de diferente longitud.



Equilátero

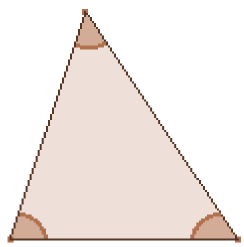


Isósceles

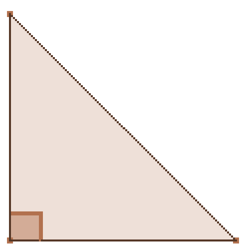


Escaleno

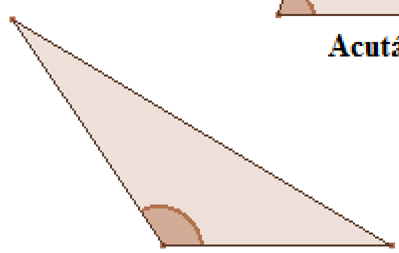
- <u>**SEGÚN SUS ÁNGULOS**</u>:
  - **Acutángulos:** sus tres ángulos interiores son agudos.
  - **Rectángulos:** tienen un ángulo recto.
  - **Obtusángulos:** tienen un ángulo obtuso.



Acutángulo

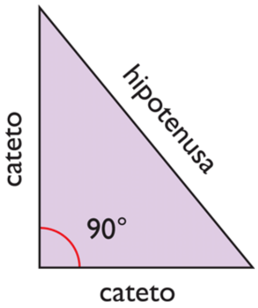


Rectángulo



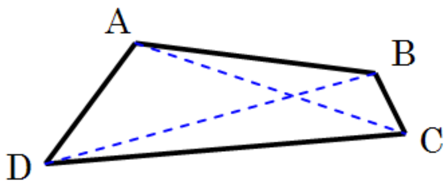
Obtusángulo

En los triángulos rectángulos los dos lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**. Los catetos suelen representarse con las letras b y c, mientras que la hipotenusa suele designarse con la letra a.



2.2. CUADRILÁTEROS.

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. Cuatro puntos del plano determinan un cuadrilátero siempre que tres cualesquiera de ellos no estén alineados. Estos puntos son los **vértices** del cuadrilátero.



Cada una de las dos diagonales del cuadrilátero lo descompone en dos triángulos por lo que los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero suman siempre 360º.

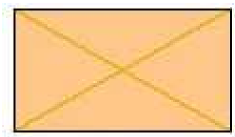
<u>CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS</u>

Los cuadriláteros se suelen clasificar según el paralelismo de sus lados:

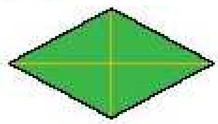
- **<u>PARALELOGRAMOS</u>**: Tienen los lados paralelos dos a dos. Los paralelogramos se clasifican en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides.

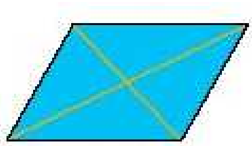
  - **<u>CUADRADOS:</u>** Tienen los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos. Sus diagonales son iguales y perpendiculares.

  - **<u>RECTÁNGULOS:</u>** Tienen los cuatro ángulos rectos y los lados iguales dos a dos. Sus diagonales son iguales y oblicuas.

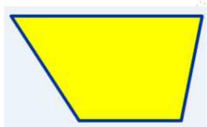
  

  - **<u>ROMBOS:</u>** Tienen los cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos. Sus diagonales tienen distinta longitud y son perpendiculares.

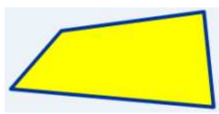
  

  - **<u>ROMBOIDES:</u>** Tienen los lados iguales dos a dos y los ángulos iguales dos a dos. Sus diagonales tienen distinta longitud y son oblicuas.

- **<u>TRAPECIOS</u>**: Sólo tienen dos lados paralelos.

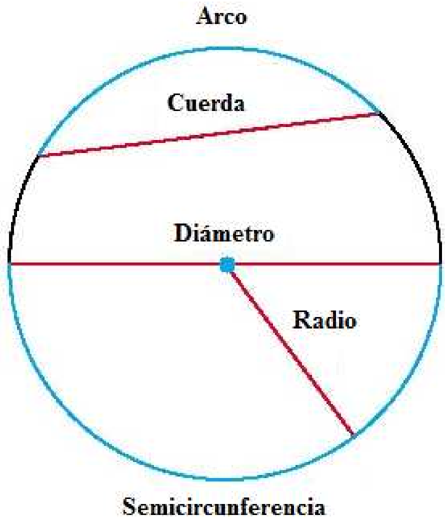


- **<u>TRAPEZOIDES</u>**: No tienen lados paralelos.

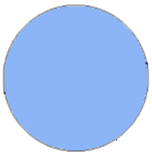


2.3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

La **circunferencia** es una línea curva cerrada en la que todos sus puntos se encuentran a la misma distancia de otro punto llamado **centro**.

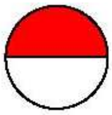


- El **radio** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- La **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- El **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- El **arco** es la parte de circunferencia comprendida entre dos puntos cualesquiera.
- La **semicircunferencia** es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

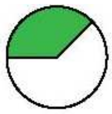


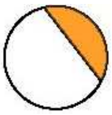
El **círculo** es la parte del plano limitada por una circunferencia.

El **semicírculo** es la mitad de un círculo.



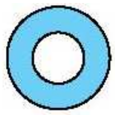
El **sector circular** es la parte de círculo limitada por dos radios y su arco correspondiente.





El **segmento circular** es la parte de círculo limitada por una cuerda y su arco correspondiente.

La **corona circular** es la parte de círculo comprendida entre dos circunferencias que tienen el mismo centro.



Antes de abordar el cálculo de perímetros y áreas de las figuras planas vamos a repasar el **Sistema Métrico Decimal (S. M. D.).**

3. S. M. D. – LONGITUD Y SUPERFICIE.

Medir forma parte de nuestra vida cotidiana y lo hacemos con mucha frecuencia a lo largo de nuestra vida. Continuamente estamos comparando una cosa con otra y el resultado de dicha comparación es la medida. Pero, ¿podemos medirlo todo? ¿Podemos medir el color, el olor, la simpatía o la amistad?

Se llaman **magnitudes** las cualidades de los objetos que se pueden medir y cuantificar de formar numérica. Para medir una magnitud la comparamos con una cantidad fija a la que denominamos **unidad de medida.**

La **medida** es el número de veces que la magnitud contiene a la unidad.

Para expresar una medida hay que indicar en qué unidad lo hacemos. No tiene ningún sentido hablar de una medida de longitud (por ejemplo) si no sabemos si son metros, centímetros o kilómetros. Cada medida lleva una cantidad y una

unidad de medida. Para realizar medidas hacen falta **instrumentos de medida**, aparatos que nos permiten comparar una unidad de medida determinada con el objeto que queremos medir. Conocemos muchos: metro, regla, balanza, cronómetro…

Si deseamos medir la longitud de un lápiz, utilizaremos una regla; para la de la pizarra un metro pero… ¿cómo medimos la altura de un edificio? (y el volumen de una piedra? No podemos hacerlo directamente sino que tenemos que realizar ciertas fórmulas matemáticas para obtener la medida. Aquellas medidas que para obtenerlas tenemos que realizar algún cálculo se denominan **medidas indirectas** mientras que las que pueden obtenerse directamente se denominan **medidas directas.**

A lo largo de la historia cada grupo social, cada región, cada país…ha adoptado sus propias unidades de medida, diferentes en cada caso. La diversidad de unidades dificulta enormemente la comunicación entre las distintas comunidades. Así surgió la necesidad de crear un sistema de medidas que fuera conocido y adoptado por todos los países. A finales del siglo XVIII, en 1972, la Academia de Ciencias de Paría propuso para tal fin el **Sistema Métrico Decimal (S. M. D.)** que es un conjunto de unidades de medida relacionadas por las magnitudes fundamentales. Pero el S. M. D. no es un simple conjunto de unidades. Está dotado de una estructura y unas relaciones que potencian su utilidad y lo hacen más valioso.

Cada unidad posee un juego de múltiplos y submúltiplos. Para obtener unidades mayores (múltiplos) y menores (submúltiplos) se tiene que multiplicar o dividir por la unidad seguida de ceros, de ahí el nombre de Sistema Métrico Decimal (sus unidades se relacionan entre sí mediante potencias de 10).

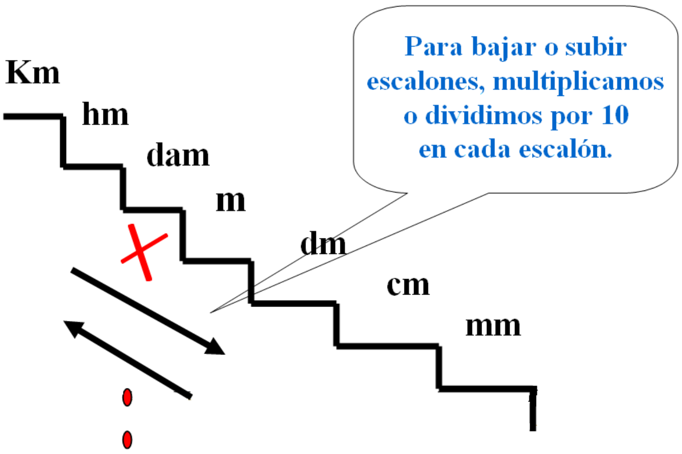
UNIDADES DE LONGITUD

La **longitud** es la distancia que hay entre dos puntos. La unidad fundamental de longitud en el S. M. D. para medir longitudes es el **metro** (m).

Para expresar bien las medidas es conveniente elegir la unidad adecuada. ¿Expresarías la distancia entre dos ciudades en milímetros? ¿Y la longitud de un lápiz en kilómetros? Cada unidad de longitud es 10 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 10 veces menor que la unidad inmediata superior.

Normalmente, las unidades de longitud se ponen en forma de escalera, de manera que si para pasar de una unidad a otra tenemos que subir, dividimos por la unidad seguida de tantos ceros como escalones subamos y por tanto correremos la coma hacia la izquierda.

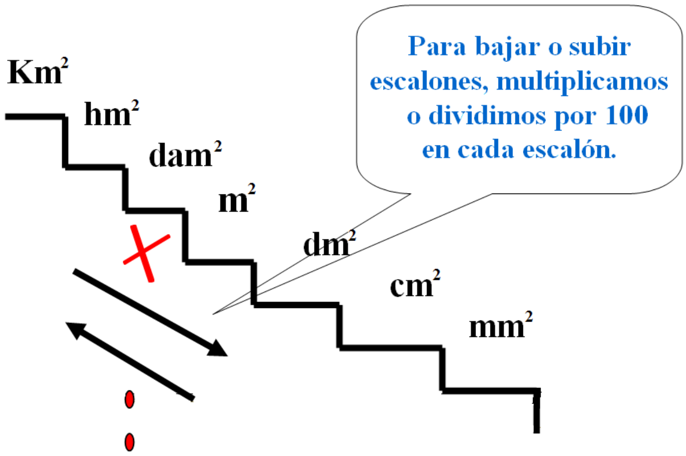
Por el contrario, si pasamos de una unidad a otra bajando escalones, tenemos que multiplicar por la unidad seguida de ceros, con lo que la coma se corre hacia la derecha.



UNIDADES DE SUPERFICIE

Cuando observamos objetos dibujados en un plano advertimos que tienen dos dimensiones, largo y ancho. La parte del plano que ocupa un objeto se llama **superficie.** Una característica muy importante de las superficies es su área. El **área** es la medida del tamaño de una superficie.

Las unidades de superficie se basan en cuadrados con lados iguales a alguna unidad de longitud. En el S. M. D. la unidad fundamental para medir superficies es el **metro cuadrado** (m^2) que es igual al área de un cuadrado con lados de un metro de longitud.



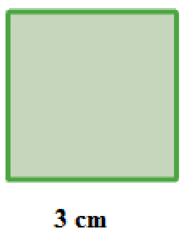
Al igual que ocurre con las unidades de longitud, además del m^2 hay otras medidas, dependiendo de si las superficies son más pequeñas o más grandes. Cada unidad de superficie es 100 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 100 veces menor que la unidad inmediata superior.

Al igual que ocurría con las unidades de longitud, también podemos representar las unidades de superficie en forma de escalera, de manera que si para pasar de una unidad a otra tenemos que subir, dividimos por la unidad seguida del doble de ceros que escalones subamos y por tanto correremos la coma hacia la izquierda.

Por el contrario, si pasamos de una unidad a otra bajando escalones, tenemos que multiplicar por la unidad seguida ceros, con lo que la coma se corre hacia la derecha.

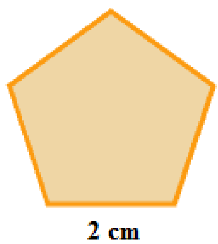
4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados. Por ejemplo:



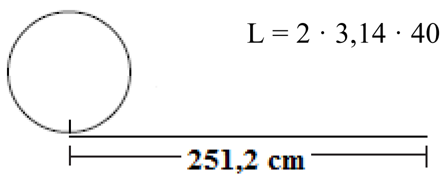
<u>Perímetro del cuadrado</u>: 3 + 3 + 3 + 3 = 3 · 4 = 12 cm.

<u>Perímetro del pentágono</u>: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 · 5 = 10 cm.

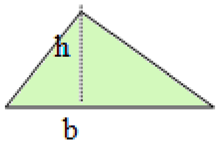
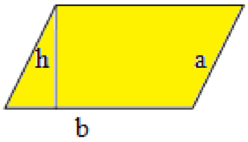
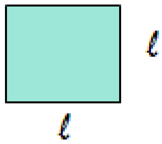
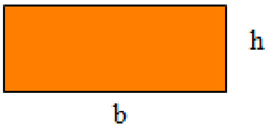
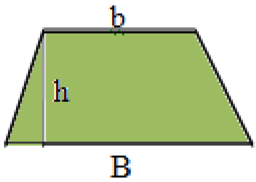
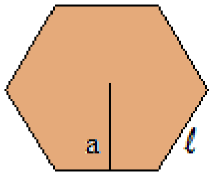
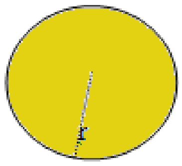
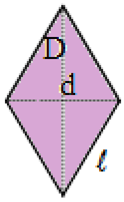
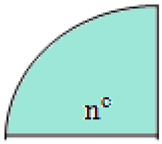


El **perímetro de un círculo** es una circunferencia y su longitud se calcula mediante la fórmula: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, donde π representa al número pi., cuyo valor aproximado es 3,14, y r es el radio de la circunferencia. Por ejemplo, si queremos calcular la longitud de la circunferencia de un espejo circular cuyo radio es de 40 cm, tendremos:

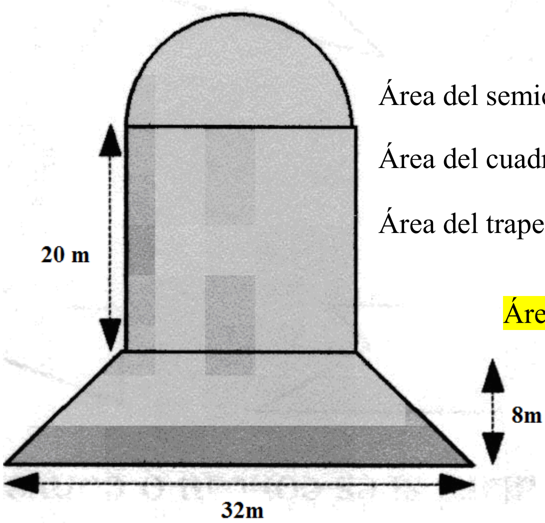
L = 2 · 3,14 · 40 = 251,2 cm



La medida del tamaño de la parte del plano que ocupa un objeto es el **área**. Calcularemos las áreas de las figuras siguientes aplicando la fórmula correspondiente:

NOMBRE	TÉRMINOS	FIGURA	FÓRMULA
Triángulo	b = base h = altura		$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo	b = base h = altura		$A = b \cdot h$
Cuadrado	ℓ = lado del cuadrado		$A = \ell \cdot \ell = \ell^2$
Rectángulo	b = base h = altura		$A = b \cdot h$
Trapecio	B = base mayor B = base menor h = altura		$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
Polígono regular	a = apotema ℓ = lado del polígono P = perímetro del políegono		$A = \frac{P \cdot a}{2}$
Círculo	r = radio del círculo		$A = \pi \cdot r^2$
Rombo	D = diagonal mayor d = diagonal menor ℓ = lado del rombo		$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Sector circular	r = radio nº = número de grados		$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^o}{360}$

Cuando nos encontramos con una figura plana a la que no podemos aplicar directamente ninguna de estas fórmulas, debemos descomponerla en otras figuras cuya área podamos calcular y obtener el área total de la figura como la suma de las áreas de las diferentes figuras planas en las que la hemos descompuesto. Por ejemplo, para calcular el área de la siguiente figura, la descomponemos en tres figuras planas cuyas áreas sabemos calcular: un semicírculo, un cuadrado y un trapecio.



Área del semicírculo $= \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} = \dfrac{3{,}14 \cdot 10^2}{2} = \dfrac{314}{2} = 157 \ \text{m}^2$

Área del cuadrado $= \ell^2 = 20^2 = 400 \ \text{m}^2$

Área del trapecio $= \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(32+20)\cdot 8}{2} = \dfrac{52 \cdot 8}{2} = 208 \ \text{m}^2$

Área de la figura = 157 + 400 + 208 = 765 m^2

ACTIVIDADES.

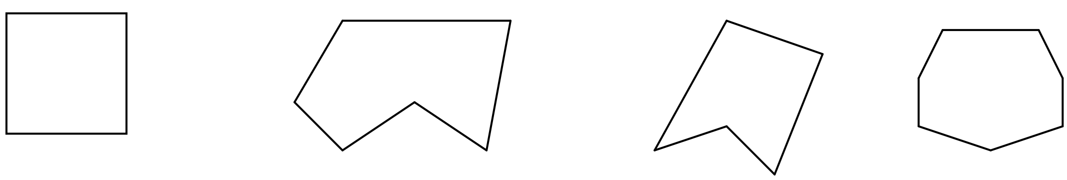
1. ¿Cuáles de siguientes ejemplos representan un punto, una recta o un plano?

a) Una línea de alta tensión.
b) Un grano de arroz.
c) La pantalla de la televisión.
d) Una pista de tenis.
e) Una puerta.
f) La superficie del agua.
g) La antena de un coche.
h) La cabeza de un tornillo.

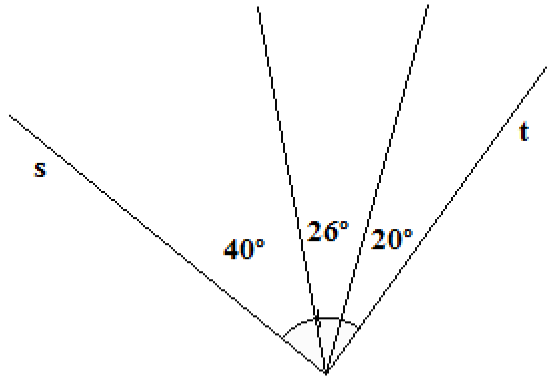
2. Dibuja:

Un punto	Una recta	Un plano	Una semirrecta	Un segmento
Dos rectas perpendiculares	Dos rectas secantes	Dos rectas paralelas	Un ángulo obtuso	Un ángulo recto

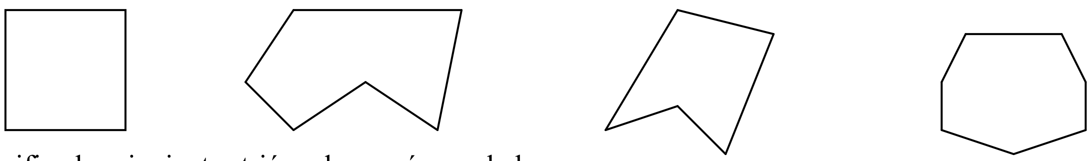
3. Marca los ángulos interiores de cada una de las siguientes figuras geométricas:



4. ¿Son perpendiculares las semirrectas s y t? ¿Por qué?



5. Señala en cada figura sus lados y sus vértices. ¿Cuántos tiene cada una de ellas? Dibuja una diagonal en cada figura.



6. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados:

LADOS	TIPO DE TRIÁNGULO
a = 3 cm ; b = 6 cm ; c = 8 cm	
a = 4 cm ; b = 5 cm ; c = 4 cm	
a = 3 cm ; b = 3 cm ; c = 3 cm	

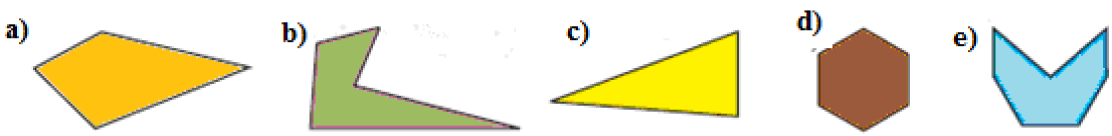
7. Calcula el ángulo que falta en cada uno de los siguientes triángulos y clasifícalos según sus ángulos:

ÁNGULOS	TIPO DE TRIÁNGULO
$\hat{A} = 30^o; \hat{B} = 75^o; \hat{C} = \_\_\_\_\_\_$	
$\hat{A} = 30^o; \hat{B} = \_\_\_\_\_\_; \hat{C} = 60^o$	
$\hat{A} = \_\_\_\_\_\_; \hat{B} = 30^o; \hat{C} = 30^o$	

8. ¿Verdadero o falso?

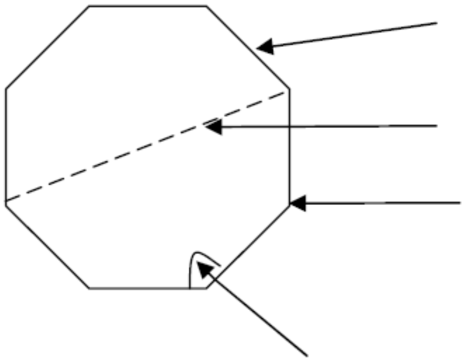
a) Existen triángulos con dos ángulos obtusos.
b) Un triángulo con un ángulo de 45º y otro de 55º es rectángulo.
c) Un triángulo isósceles no puede ser obtusángulo.
d) No existen triángulos que sean a la vez rectángulos y escalenos.

9. Nombra cada uno de los polígonos siguientes:

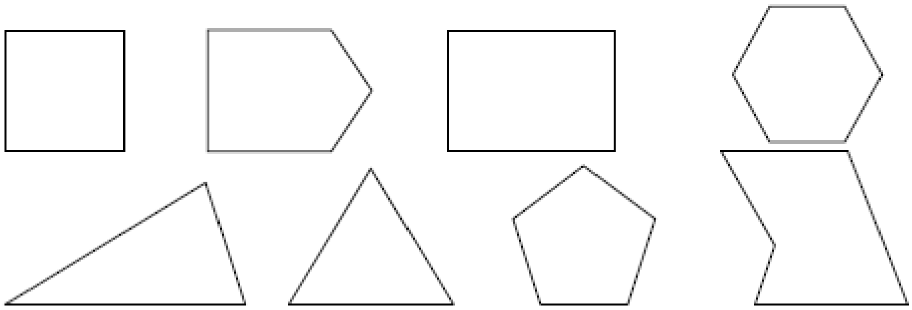


10. ¿Qué tipo de triángulo será uno que tiene dos ángulos de 45º?

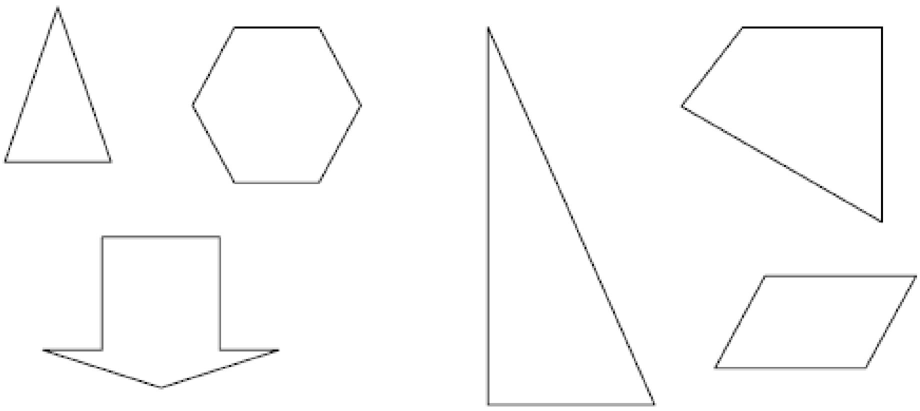
11. Identifica cada uno de los elementos de este polígono:



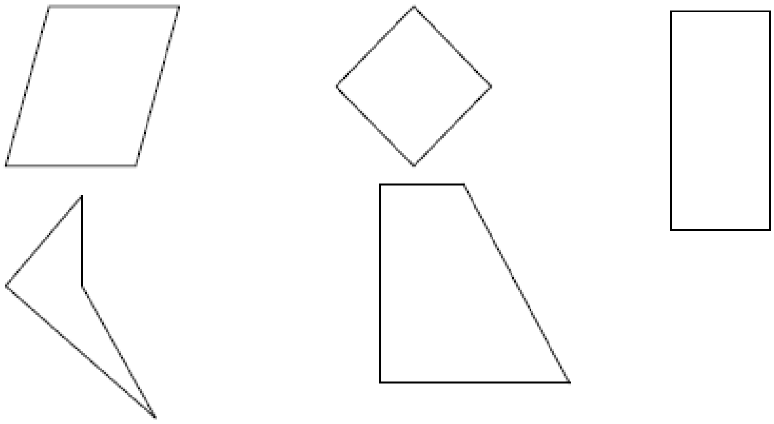
12. Clasifica los siguientes polígonos en regulares e irregulares:



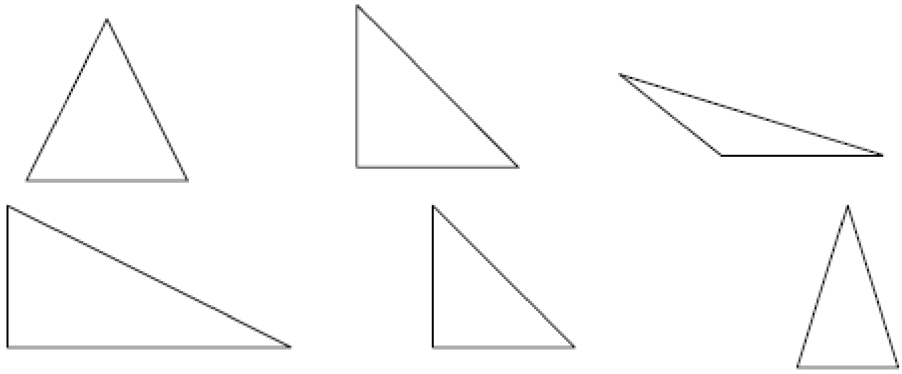
13. Escribe el nombre de los siguientes polígonos según el número de lados que tienen:



14. Escribe el nombre más preciso que conozcas para cada uno de los siguientes cuadriláteros:



15. Escribe el nombre de los siguientes triángulos atendiendo a sus lados y a sus ángulos:



16. Averigua, en cada caso, de qué cuadrilátero se trata:

a) Tiene sólo dos lados paralelos.
b) Tiene los lados iguales y los ángulos rectos.
c) Tiene los ángulos rectos y los lados desiguales.
d) Tiene los ángulos opuestos iguales y los lados desiguales.
e) Tiene los ángulos desiguales y los lados iguales.

17. Efectúa los siguientes cambios de unidades de longitud:

a) 5 km a dm
b) 3 mm a m
c) 0,4 hm a km
d) 6 cm a mm
e) 0,02 dam a cm
f) 308 cm a dam

18. Efectúa los siguientes cambios de unidades de superficie:

a) 2 m^2 a km^2
b) 3 km^2 a dam^2
c) 0,5 hm^2 a dm^2
d) 400 mm^2 dam^2
e) 15537 mm^2 a m^2
f) 0,023 hm^2 a m^2

19. Expresa en metros las siguientes longitudes:

a) 0,07 km
b) 50,7 cm
c) 380 mm
d) 0,29 dam
e) 3 dm
f) 12 hm

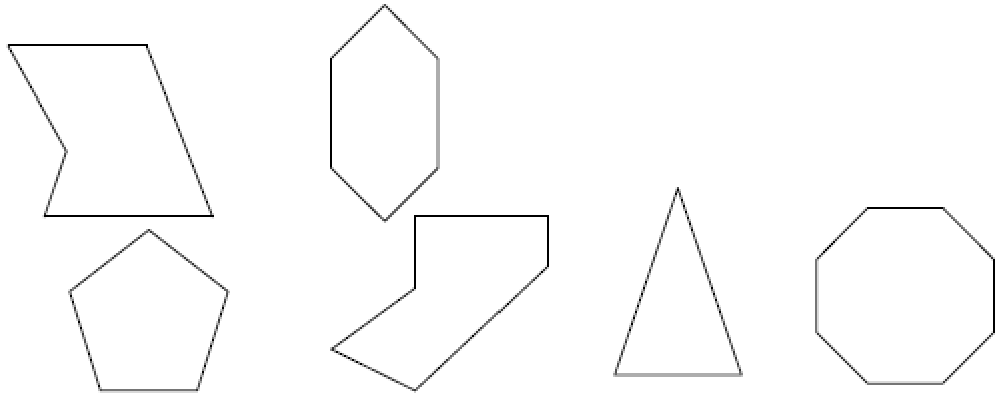
20. Expresa en hm^2 las siguientes medidas de superficie:

a) 7200000 mm^2
b) 65314 cm^2
c) 3671 dm^2
d) 0,063 km^2
e) 0,08 dam^2
f) 7,5 m^2

21. Calcula y contesta:

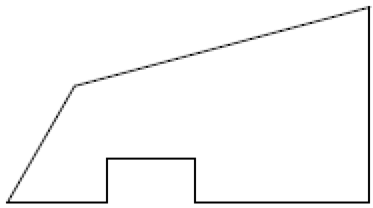
a) ¿Cuánto mide el perímetro de un cuadrado de 15 cm de lado?
b) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es de 160 m?
c) ¿Cuánto mide el perímetro de un pentágono regular de 12 cm de lado?
d) ¿Cuánto mide el lado de un pentágono regular cuyo perímetro es de 120 cm?

22. Mide la longitud de los lados de cada polígono y calcula su perímetro.

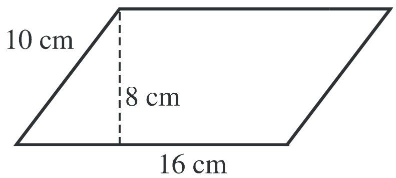


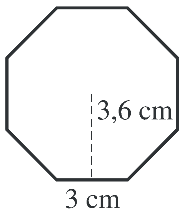
23. Juan pone alrededor de su piscina una valla. Observa la forma de la piscina y, teniendo en cuenta que el dibujo está realizado a escala 1 : 100 (cada centímetro del dibujo corresponde a 100 cm de la medida real de la piscina), calcula:

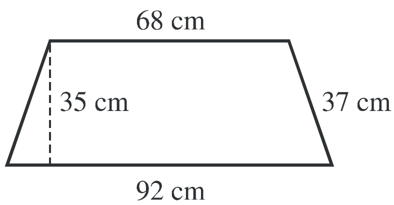
a) ¿Cuántos metros de valla necesita?
b) Si el metro de valla cuesta 8,5 € ¿cuánto pagó en total?



24. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:







25. El círculo central de un campo de fútbol mide 9,5 m de radio. ¿Cuál será su superficie?

26. En un jardín hay un rombo cuyas diagonales tienen 5,40 m y 4,60 m ¿Cuántas flores se podrán plantar colocando una por dm^2?

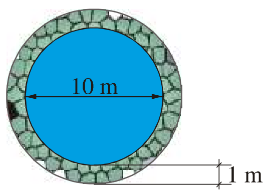
27. El perímetro del gimnasio mide 1.200 decímetros. Si mide 40 metros de largo. ¿Cuánto mide de ancho?

28. El ruedo de una plaza de toros mide 15 m de radio. ¿Cuántos metros recorre un torero si le da 5 vueltas completas?

29. Para embaldosar una habitación rectangular de 9 metros de ancho y 6 metros de largo se utilizan baldosas cuadradas de 30 cm de lado.

a) ¿Cuántas baldosas son necesarias para cubrir el suelo de la habitación?
b) ¿Cuál será su coste si cada m^2 de baldosa cuesta 12 €?

30. Una fuente circular está rodeada de un zócalo de mármol. El diámetro de la fuente es de 10 metros y el zócalo tiene un metro de ancho. ¿Cuál es la superficie recubierta por el mármol?



31. La rueda de una bicicleta tiene de diámetro 85 centímetros. ¿Qué distancia se recorrerá si la rueda da exactamente 100 vueltas?

32. Calcula las baldosas cuadradas de 40 cm de lado cabrán en el suelo de un pasillo de 2 m de ancho y 6 m de largo.

33. ¿Cuántos camiones de arena hacen falta para llenar el coso de una plaza de toros, de 60 m de diámetro, si la arena de cada camión cubre 15,7 m^2 del coso.

33. En el patio de la escuela que tiene 25 m por 15 m se concentran todos los alumnos para manifestarse contra el racismo. Se calcula que caben 3 alumnos por metro cuadrado. ¿Cuántos alumnos hay en la manifestación.

34. Una hoja de papel tiene 30 cm de largo por 21 cm de ancho. Cuando escribes dejas un margen superior de 4 cm, uno inferior de 2,5 cm, el lateral izquierdo de 2,5 cm y el derecho de 1 cm. ¿Cuántos cm^2 ocupa el texto escrito?

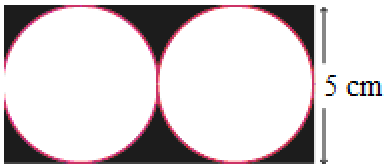
35. El recorrido de una regata de vela tiene forma de triángulo equilátero, situándose una boya en cada vértice. Si la distancia entre cada boya es de 5 millas marinas y se deben dar 8 vueltas, ¿cuántas millas marinas deben recorrer los veleros?

36. Un campo de fútbol mide 100 m de largo y 70 de ancho. ¿Cuánto mide su perímetro?
En cada metro cuadrado de este campo se siembran 10 g de semillas de césped, ¿cuántos kilos de semillas se necesitarán?

37. Un CD mide 6 cm de radio.

a) ¿Cuál es su superficie?
b) ¿Cuál es la superficie de la caja que lo contiene?

38. Calcula el área total de la siguiente figura:



39. Calcula el área de la superficie sombreada: