# Funciones: Representación y Tipos.

## 1 CONCEPTOS BÁSICOS

### 1.1 DEFINICIONES

Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se les llama "x" e "y".

- "x" es la variable independiente.
- "y" es la variable dependiente (depende de la "x").

La función, que se suele denominar y = f(x), asocia a cada valor de x un único valor de y: $\boxed{x \Rightarrow y = f(x)}$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos, con sendas escalas, representamos las dos variables:

- La x sobre el eje horizontal o eje de abscisas.
- La y sobre el eje vertical o eje de ordenadas.

Cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas, su abscisa, x, y su ordenada, y.

Se llama dominio de definición de una función, f, y se designa por Dom f o D(f), al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama recorrido de f y se designa Rec(f) o R(f), al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuando hay un x tal que f(x) = y

## 2 CÓMO SE NOS PRESENTAN LAS FUNCIONES

### 2.1 MEDIANTE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su representación gráfica. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

### 2.2 MEDIANTE UN ENUNCIADO

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa.

Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

### 2.3 MEDIANTE UNA TABLA DE VALORES

Con frecuencia se nos dan los datos de una función mediante una tabla de valores en la cual se obtienen directamente los datos buscados, aunque en otros casos, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

### 2.4 MEDIANTE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA O FÓRMULA

La expresión analítica es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

## 3 DOMINIO DE DEFINICIÓN Y EXPRESIÓN ANALÍTICA

### 3.1 DEFINICIÓN

Se llama dominio de definición o simplemente dominio de una función f, y se designa por D(f) = Dom (f), al conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales hay un f(x).

### 3.2 RESTRICCIONES DEL DOMINIO

El dominio de una función puede quedar restringido por una de las siguientes causas:

- Imposibilidad de realizar alguna operación.
    - Valores que anulen el denominador.
    - Raíces de índice par de números negativos.
- Contexto real del cual se ha extraído la función.
- Voluntad de quien propone la función.

### 3.3 CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Polinomios: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

Cocientes: $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ : $\boxed{D = \mathbb{R} - \{x \,/\, d(x) = 0\}}$

Raíces de índice impar: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

Raíces de índice par: $f(x) = \sqrt[n]{r(x)}$ : $\boxed{D = \{x/\ r(x)\ \ 0\}}$

# 4 RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

## 4.1 DEFINICIÓN

Se llama recorrido de una función f, y se designa por R(f), al conjunto de valores de y para los cuales existe x, es decir, conjunto de valores que toma la variable dependiente "y".

## 4.2 CÁLCULO DEL RECORRIDO

Para calcular el recorrido de una función, se dibuja y luego se estudia sobre el eje de ordenadas.

# 5 PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES DE COORDENADAS

## 5.1 PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ABSCISAS, OX

Como el eje de abscisas, tiene de ecuación y = 0, los puntos serán de la forma $(x_o,0)$

## 5.2 PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ORDENADAS, OY

Como el eje de ordenadas, tiene de ecuación x = 0, los puntos serán de la forma $(0,y_o)$.

# 6 SIMETRÍA

## 6.1 DEFINICIÓN

Una función es par o simétrica respecto del eje OY si $\boxed{f(x) = f(-x)}$

Una función es impar o simétrica respecto del origen O si $\boxed{f(x) = - f(-x)}$

Una función que no es par ni impar se dice que es no simétrica.

# 7 DISCONTINUIDADES. CONTINUIDAD

## 7.1 IDEA INTUITIVA

La idea de función continua es la de que puede ser representada con un solo trazo.

Una función que no es continua presenta alguna discontinuidad.

### 7.2 DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Una función se llama continua cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo. Una función puede ser continua en un intervalo si solo presenta discontinuidades fuera de él.

Las funciones con expresiones analíticas elementales son continuas en sus dominios.

### 7.3 TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Varias razones por las que una función puede ser discontinua en un punto:

- Tiene ramas infinitas en ese punto. Es decir, los valores de la función crecen o decrecen indefinidamente cuando la x se acerca al punto. Se dice que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en ese punto.
- Presenta un salto. Se dice que presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en ese punto.
- No está definida (le falta un punto) o el punto que parece que le falta lo tiene desplazado. Se dice que presenta una discontinuidad evitable en ese punto.

## 8 TENDENCIA Y PERIODICIDAD

### 8.1 TENDENCIA

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen ramas con una tendencia muy clara. Estas ramas reciben el nombre de asíntotas.

Existen tres tipo de asíntotas:

- Asíntotas verticales: $\boxed{x = a}$
- Asíntotas horizontales: $\boxed{y = b}$
- Asíntotas oblicuas: $\boxed{y = mx + n}$

### 8.2 PERIODICIDAD

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama periodo.

## 9 MONOTONÍA, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

### 9.1 MONOTONÍA

Una función es creciente cuando al aumentar la x aumenta la y.

Una función es decreciente cuando al aumentar la x disminuye la y.

### 9.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función presenta un máximo absoluto en un punto cuando es el valor más alto de su representación gráfica. Este punto debe de ser del dominio.

Una función presenta un mínimo absoluto en un punto cuando es el valor más bajo de su representación gráfica. Este punto debe de ser del dominio.

Una función presenta un máximo relativo en un punto cuando en dicho punto la función pasa de creciente a decreciente. Este punto debe de ser del dominio.

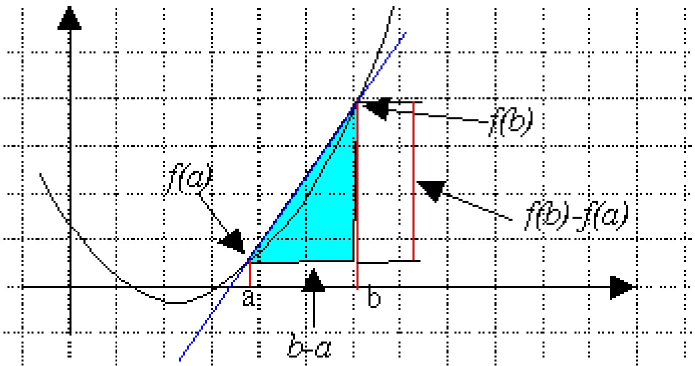
Una función presenta un mínimo relativo en un punto cuando en dicho punto la función pasa de decreciente a creciente. Este punto debe de ser del dominio.

### 9.3 TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M)

Para medir la variación (aumento o disminución) de una función en un intervalo se utiliza la tasa de variación media.

Se llama tasa de variación media de una función f en el intervalo [a,b] al cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo.

$$\text{T.V.M de f en [a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$




La T.V.M. de f en [a,b] es la pendiente del segmento AB.

## 10 CURVATURA, PUNTOS DE INFLEXIÓN

### 10.1 CURVATURA

Una función es cóncava cuando presenta la siguiente forma: ∩

Una función es convexa cuando presenta la siguiente forma: $\cup$

### 10.2 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Puntos (del dominio) donde la función cambia de curvatura, es decir, pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

## 11. TIPOS DE FUNCIONES

### Funciones algebraicas

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las funciones algebraicas pueden ser:

#### Funciones explícitas

Si se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución. $\boxed{f(x) = 5x - 2}$

#### Funciones implícitas

Si no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones. $\boxed{5x - y - 2 = 0}$

### Funciones polinómicas

Son las funciones que vienen definidas por un polinomio. $\boxed{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^n}$

Su dominio es $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número real tiene imagen.

#### Funciones constantes

El criterio viene dado por un número real. $\boxed{f(x) = k}$

La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.

#### Funciones polinómica de primer grado

$\boxed{f(x) = mx + n}$

Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función. Las principales son:

- Función afín.
- Función lineal.
- Función identidad.

**Funciones cuadráticas**

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Son funciones polinómicas es de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

**Funciones a trozos**

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren.

- Funciones en valor absoluto.
- Función parte entera de x.
- Función mantisa.
- Función signo.

## Funciones racionales

El criterio viene dado por un cociente entre polinomios:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

## Funciones radicales

El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.

El dominio de una función irracional de índice impar es $\mathbb{R}$.

El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

### Funciones trascendentes

La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

### Función exponencial

$f(x) = a^x$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia $a^x$ se llama función exponencial de base a y exponente x.

### Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$f(x) = \log_a(x)$ ,, $a>0$, $a\neq 1$

### Funciones trigonométricas

- **Función seno** $f(x) = \mathrm{sen}(x)$
- **Función coseno** $f(x) = \cos(x)$
- **Función tangente** $f(x) = \mathrm{tg}(x)$
- **Función cosecante** $f(x) = \mathrm{cosec}(x)$
- **Función secante** $f(x) = \sec(x)$
- **Función cotangente** $f(x) = \mathrm{cotg}(x)$

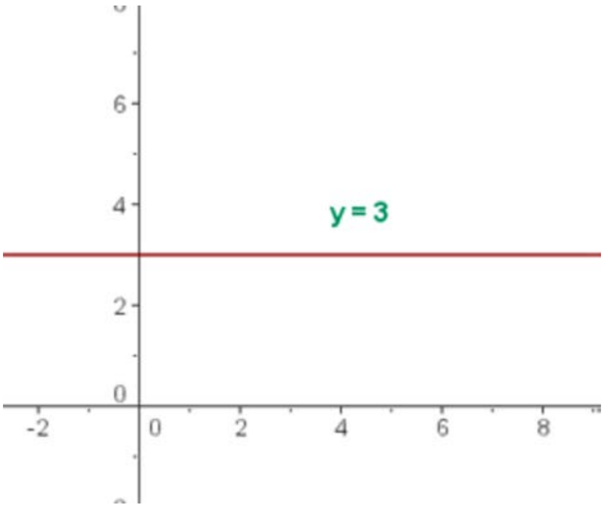
## Funciones constantes

La función constante es del tipo: $y = n$

El criterio viene dado por un número real.

La pendiente es 0.

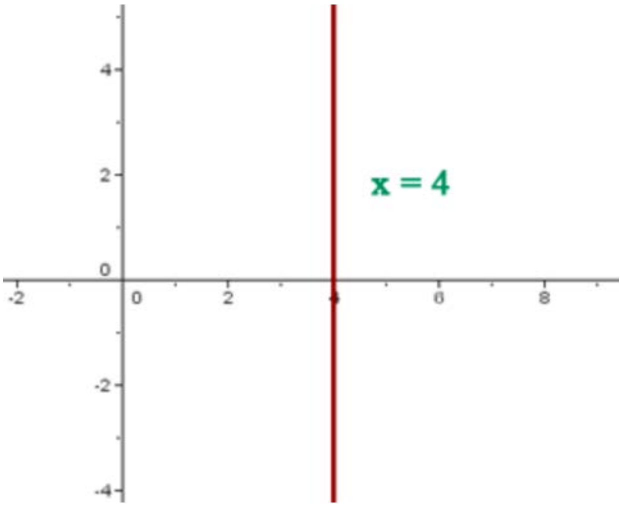
La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.

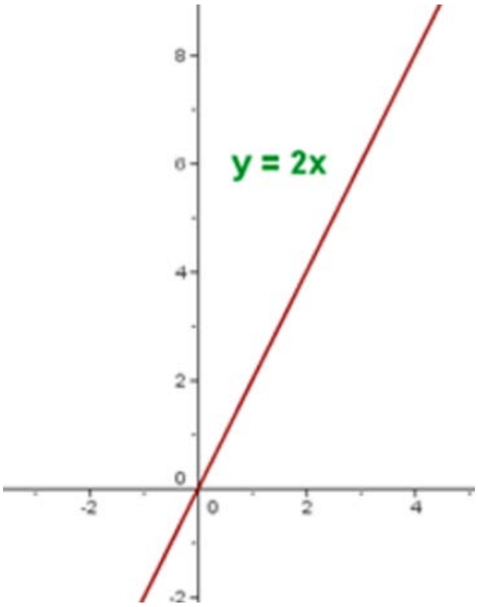


### Rectas verticales

Las rectas paralelas al eje de ordenadas no son funciones, ya que un valor de x tiene infinitas imágenes y para que sea función sólo puede tener una. Son del tipo:

x = K




### Función lineal

La función lineal es del tipo:

y = mx

Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

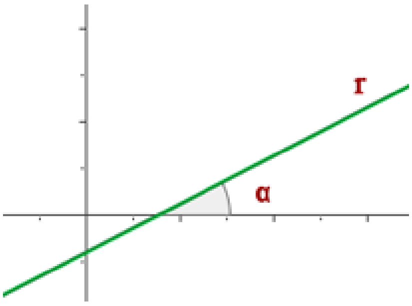
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = 2x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

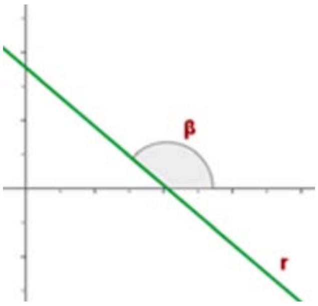
### Pendiente

m es la pendiente de la recta.

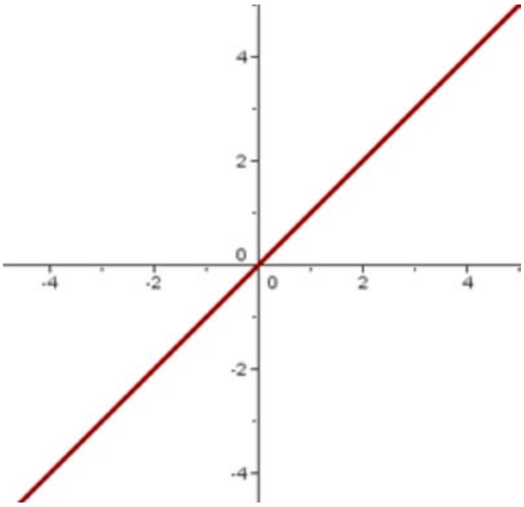
La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Si m > 0 la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo.



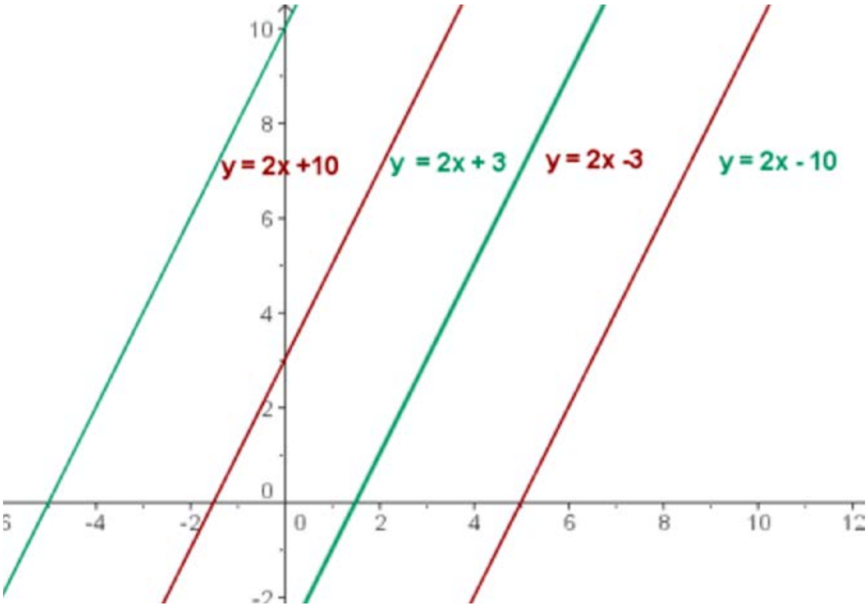

Si m < 0 la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.



## Función identidad

f(x) = x

Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.




## Función afín

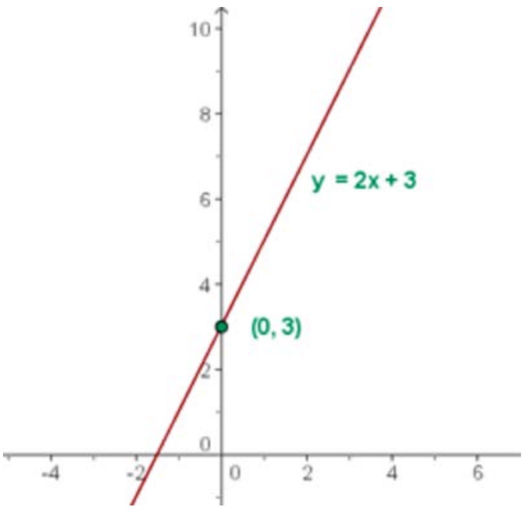
La función afín es del tipo: y = mx + n

m es la pendiente de la recta.

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

n es la ordenada en el origen y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

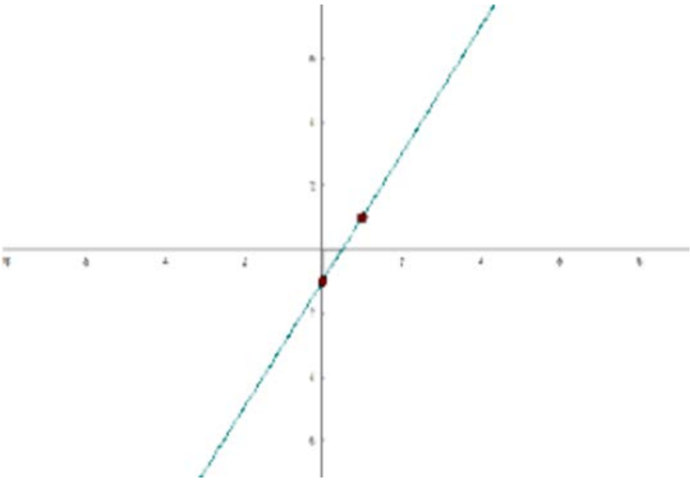


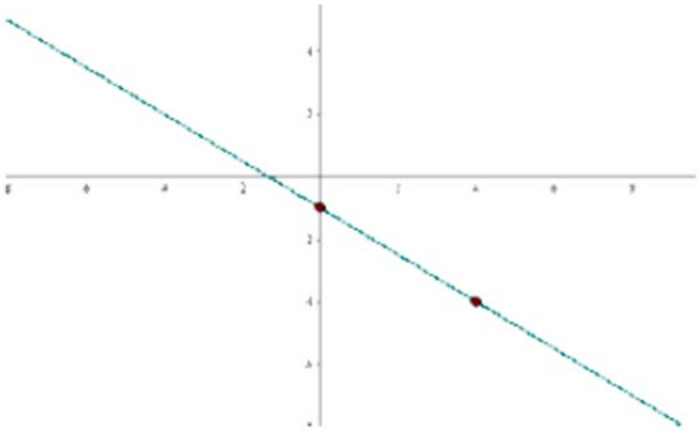
**Ejemplos de funciones afines**

Representa las funciones:

**1** $y = 2x - 1$

| x | y = 2x-1 |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |





**2** $y = -\frac{3}{4}x - 1$

| x | y = -¾x – 1 |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 4 | -4 |

## Función cuadrática

Son funciones polinómicas es de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

### Representación gráfica de la parábola

Podemos construir una parábola a partir de estos puntos:

**1. Vértice** $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Por el vértice pasa el eje de simetría de la parábola.

La ecuación del eje de simetría es: $x = \frac{-b}{2a}$

**2. Puntos de corte con el eje OX**

En el eje de abscisas la segunda coordenada es cero, por lo que tendremos:

$ax^2 + bx + c = 0$

Resolviendo la ecuación podemos obtener:

Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ si $b^2 - 4ac > 0$

Un punto de corte: $(x_1, 0)$ si $b^2 - 4ac = 0$

Ningún punto de corte si $b^2 - 4ac < 0$

**3. Punto de corte con el eje OY**

En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero, por lo que tendremos:

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ $(0,c)$

**Ejemplos: Representar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.**

**1. Vértice**

$x_v = -(-4) / 2 = 2$ $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

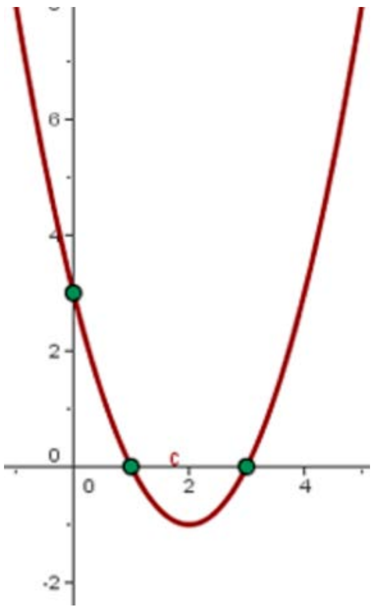
V(2, -1)

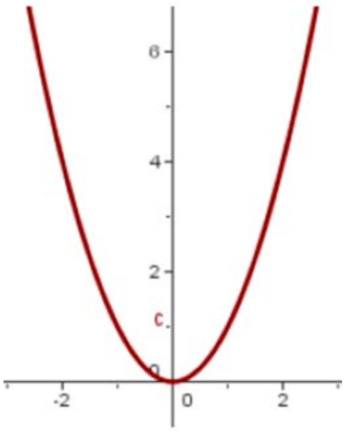
**2. Puntos de corte con el eje OX**

$x^2 - 4x + 3 = 0$ (3, 0) (1, 0)

**3. Punto de corte con el eje OY**

(0, 3)





Traslaciones de parábolas

Construcción de parábolas a partir de $y = x^2$

Partimos de $y = x^2$

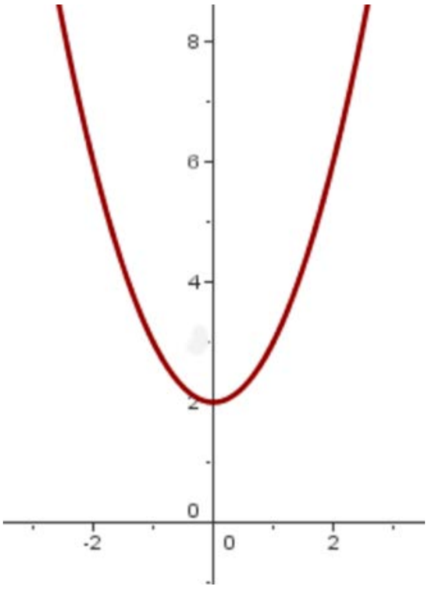
| x | $y = x^2$ |
|---|---|
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |

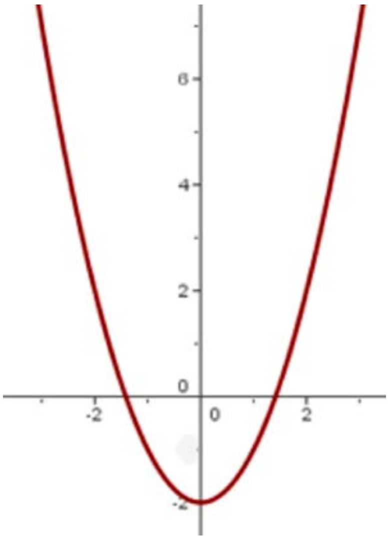
## 1. Traslación vertical

$y = x^2 + k$

Si $k > 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia arriba k unidades.

Si $k < 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia abajo k unidades.




El vértice de la parábola es: (0, k).

El eje de simetría $x = 0$.

$y = x^2 +2$ $\quad$ $y = x^2 -2$

## 2. Traslación horizontal

$y = (x + h)^2$

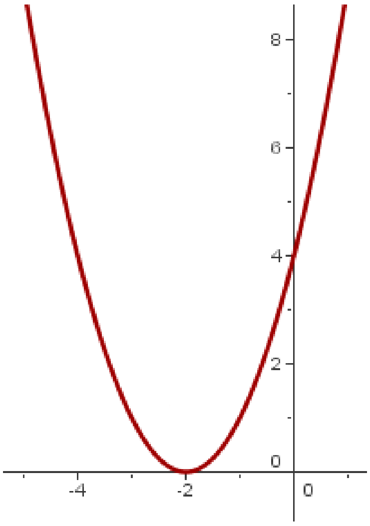
Si $h > 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la izquierda h unidades.

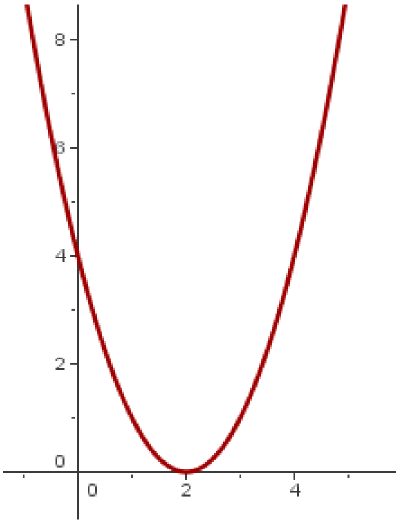
Si $h < 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la derecha h unidades.

El vértice de la parábola es: (-h, 0).

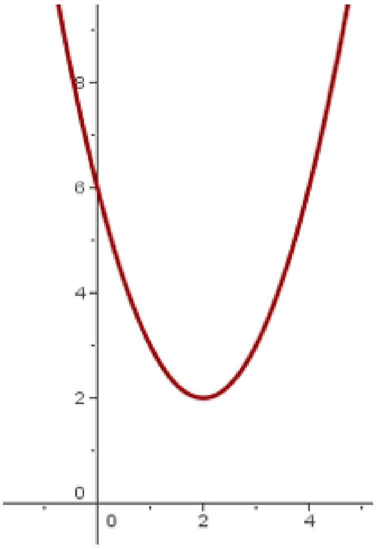
El eje de simetría es $x = -h$.

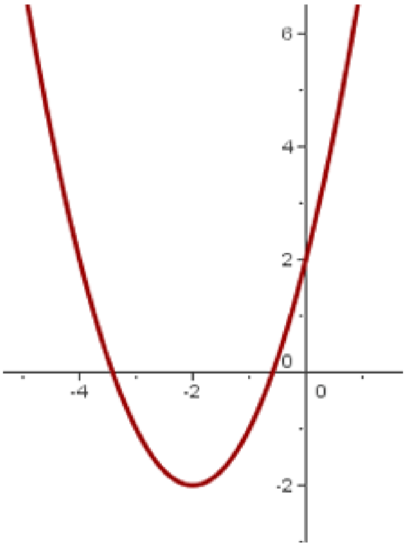
$y = (x + 2)^2$ $\quad$ $y = (x - 2)^2$



## 3. Traslación oblicua





$y = (x + h)^2 + k$

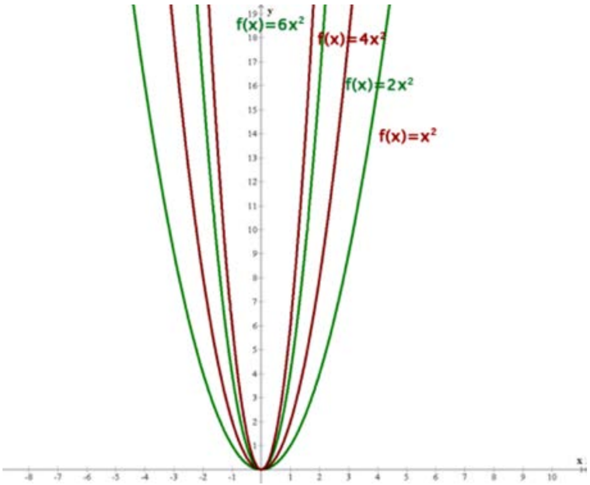
El vértice de la parábola es: (-h, k).

El eje de simetría es x = -h.

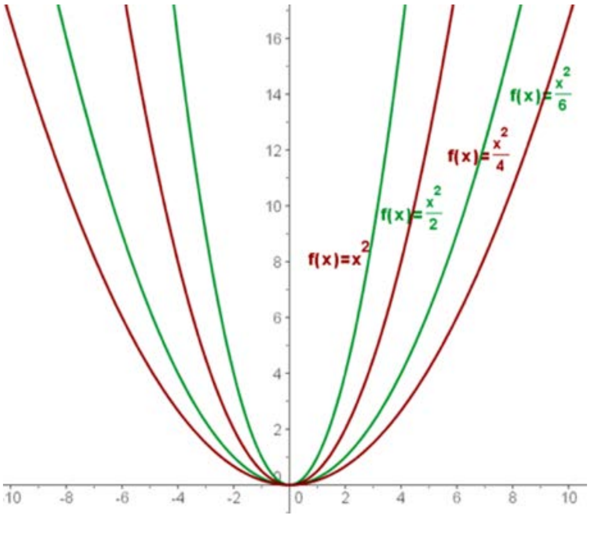
$y = (x - 2)^2 + 2$

$y = (x + 2)^2 - 2$

## Dilataciones y contracciones de funciones. Contracción de una función




Una función f(k·x) se contrae si K > 1.

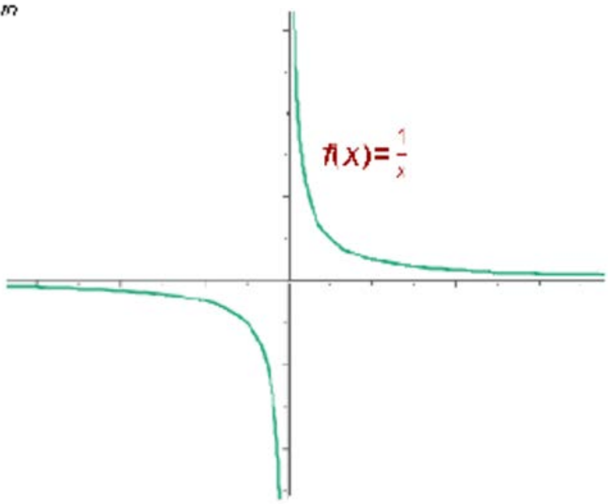



Una función f(k·x) se dilata si 0 < K < 1.

## Funciones racionales

El criterio viene dado por un cociente entre polinomios:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

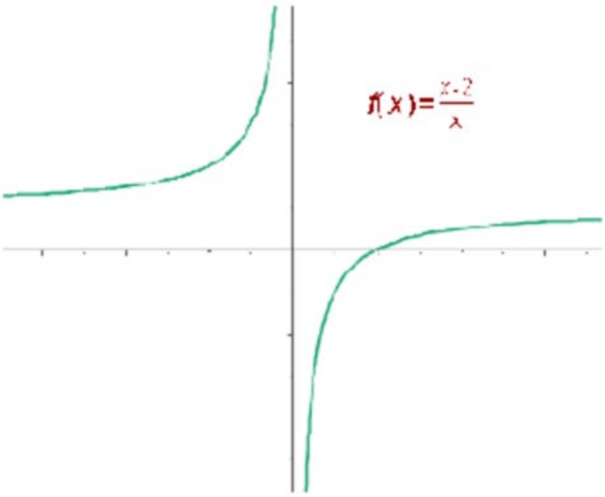



El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

Dentro de este tipo tenemos las funciones de proporcionalidad inversa de ecuación:

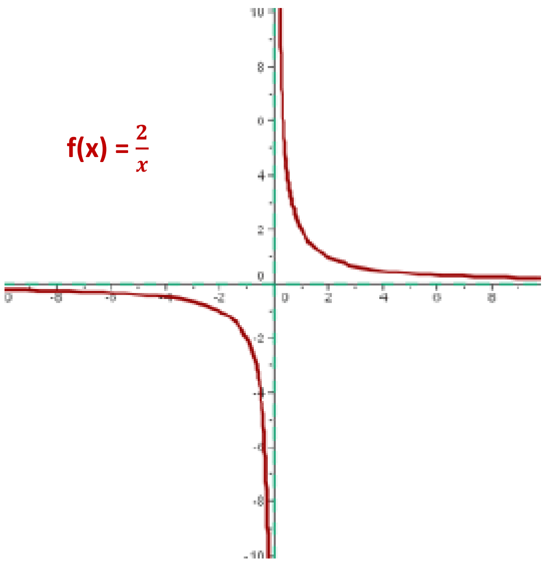
$$f(x) = \frac{k}{x}$$

Sus gráficas son hipérbolas.




También son hipérbolas las gráficas de las funciones.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$




### Traslaciones de hipérbolas

Las hipérbolas $f(x) = \frac{k}{x}$ son las más sencillas de representar.

Sus asíntotas son los ejes.

El centro de la hipérbola, que es el punto donde se cortan las asíntotas, es el origen.

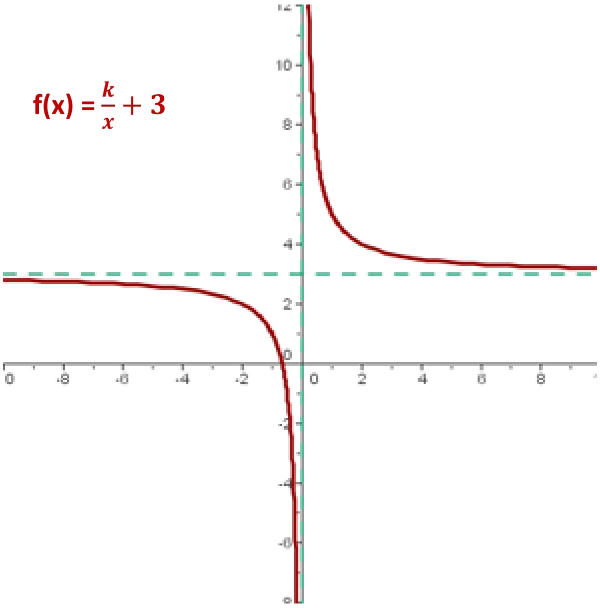
A partir de estas hipérbolas se obtienen otras por traslación.

**1. Traslación vertical**

$$f(x) = \frac{k}{x} + a$$

El centro de la hipérbola es: (0, a).

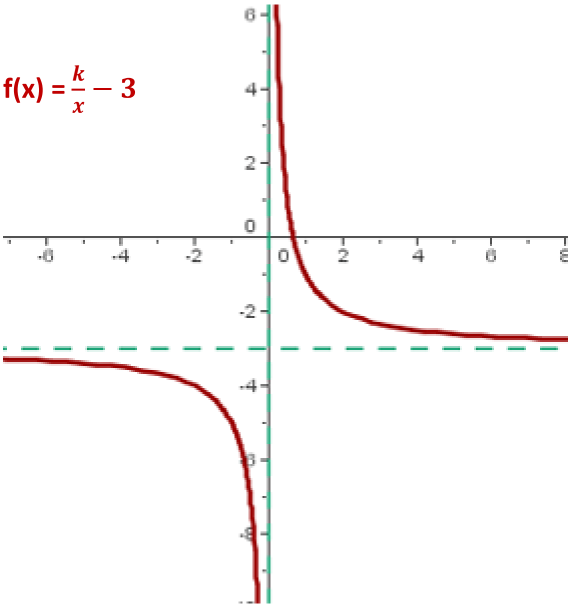
**f(x) =** $\boldsymbol{\frac{k}{x} + 3}$



Si a>0, $f(x) = \frac{k}{x}$ se desplaza hacia arriba ***"a"*** unidades.

El centro de la hipérbola es: (0, 3)

**f(x) =** $\boldsymbol{\frac{k}{x} - 3}$



Si a<0, $f(x) = \frac{2}{x}$ se desplaza hacia abajo ***"a"*** unidades.

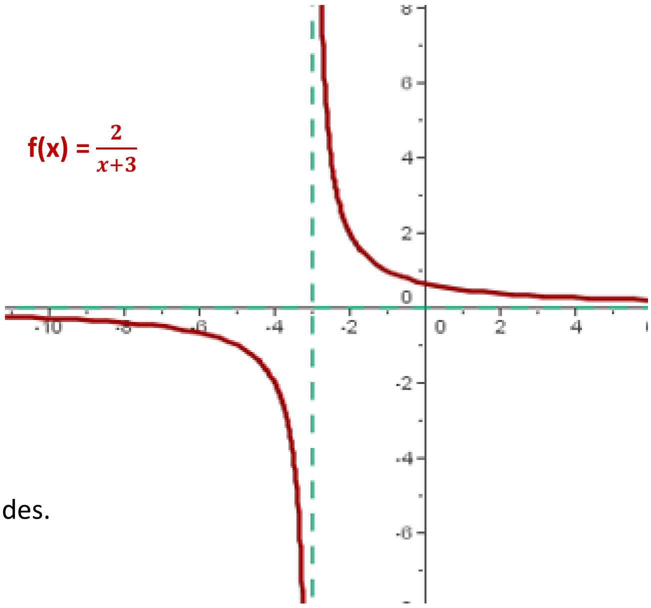
El centro de la hipérbola es: (0, -3)

**2. Traslación horizontal**

$$f(x) = \frac{k}{x+b}$$

El centro de la hipérbola es: (-b, 0).

**f(x) =** $\boldsymbol{\frac{2}{x+3}}$



Si b> 0, $f(x) = \frac{2}{x}$ se desplaza a la izquierda ***"b"*** unidades.

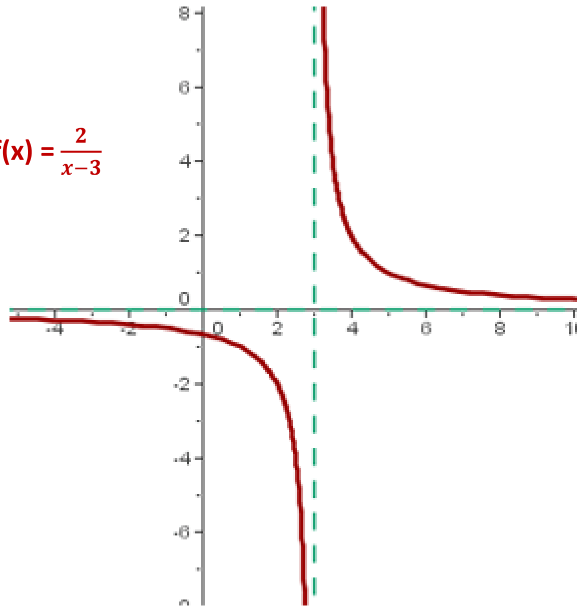
# Funciones: Representación y Tipos.

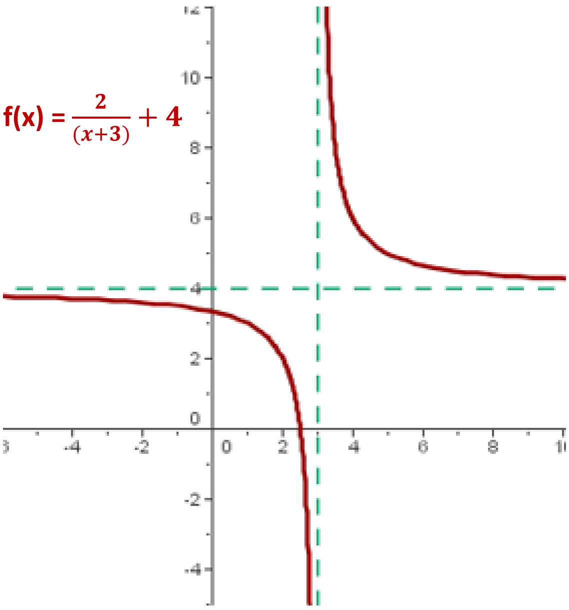
El centro de la hipérbola es: (-3, 0)

Si b<0, f(x) = $\frac{2}{x}$ se desplaza a la derecha ***"b"*** unidades.

El centro de la hipérbola es: (3, 0)

**f(x) = $\frac{2}{x-3}$**






## 3. Traslación oblicua

f(x) = $\frac{k}{(x+b)} + a$

El centro de la hipérbola es: (-b, a)

El centro de la hipérbola es: (3, 4).

Para representar hipérbolas del tipo: f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$

se divide y se escribe como: f(x) = $\frac{k}{(x+b)} + a$

Su representación gráfica es una hipérbola de centro (-b, a) y de asíntotas paralelas a los ejes.

**f(x) = $\frac{3x+5}{x+1}$**

El centro de la hipérbola es: (-1, 3).